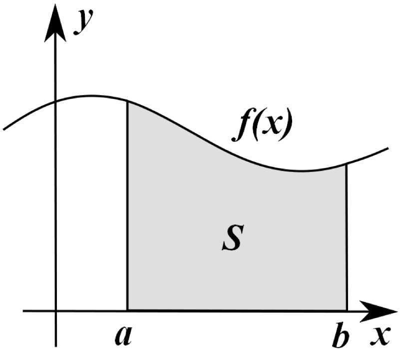
Többes integrálok

2021. április 12.

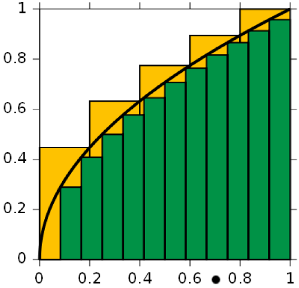
Területszámítás

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ korlátos függvény.



Mennyi a függvény grafikonja és az x tengely közti terület?

Riemann integrál, ismétlés



$$s = \sup\{s(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathbb{F}\},$$
$$S = \inf\{S(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

Ekkor $s \leq S$.

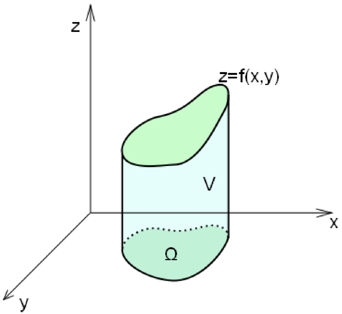
Ha $s = S$, akkor f RIEMANN INTEGRÁLHATÓ.

A függvény Riemann integrálja

$$\int_a^b f(x)dx = s = S.$$

Riemann integrál kétváltozós függvényekre

$R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, zárt halmaz. $f : R \to \mathbb{R}^+$ *folytonos* függvény.

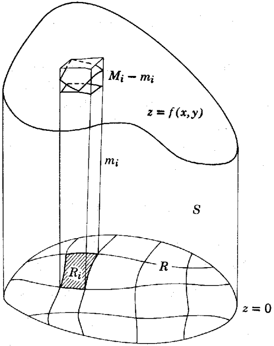


$$S = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in R, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Mekkora az $f(x, y)$ felület alatti térrész térfogata, $V = V(S)$?

A kettős integrál közelítése

R egy felosztása: $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$, ahol $\mathrm{int} R_i \cap \mathrm{int} R_j = \emptyset$.



$$m_i = \inf\{f(x,y) : \ (x,y) \in R_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x,y) : \ (x,y) \in R_i\}.$$

Az R_i tartomány területe:

$$A(R_i) \quad \text{"}Area\text{"} \ .$$

Ekkor $\quad s_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \cdot m_i \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \cdot M_i = S_n.$

Definíció. Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ halmaz ÁTMÉRŐJE

$$\delta(R) = \sup\{\|P_1 - P_2\| : \ P_1, P_2 \in R\}.$$

A FELOSZTÁS FINOMSÁGA $\delta(\mathcal{F}) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \delta(R_i).$

f *folytonos* R-en, ezért egyenletesen is folytonos. $\Longrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy ha $\delta(\mathcal{F}) < \delta$, akkor $M_i - m_i < \varepsilon$.

Ekkor $S_n - s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} A(R_i) \cdot (M_i - m_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} A(R_i)\varepsilon = \varepsilon \cdot A(R).$

Ezért $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{S_n : n \in \mathbb{N}\}.$

Az imént definiált térfogatot így jelöljük:

$$V(S) = \iint\limits_R f(x, y) dR.$$

A kettős integrál értelmezése

Definíció. $f : R \to \mathbb{R}$ *korlátos*, $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos. Ennek felosztása:

$$R = R_1 \cup \ldots \cup R_n, \text{ ahol } \mathrm{int} R_i \cap \mathrm{int} R_j = \emptyset.$$

Legyen $(\xi_i, \eta_i) \in R_i$. A felosztáshoz tartozó Riemann-féle közelítő összeg:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(R_i).$$

f Riemann-integrálható, ha létezik:

$$\lim_{\substack{n \to \infty, \\ \max \delta(R_i) \to 0}} V_n = V.$$

Jelölés: $\displaystyle\iint_R f(x, y)\; dR = \iint_R f(x, y)\, d(x, y).$

A kettős integrál

Következmény. Ha $f(x, y)$ folytonos, ÉT-a R *Jordan mérhető*, (jegyzetben) akkor f ezen a tartományon *integrálható* is.

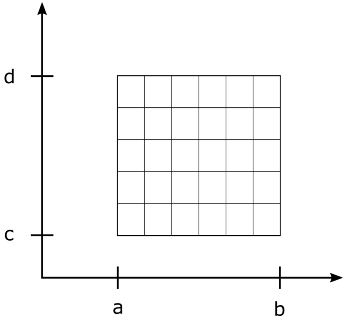
Példa. $\forall(x, y) \in R$ esetén legyen $f(x, y) = 1$.

Ekkor

$$\iint\limits_R 1 \; dR = A(R).$$

A kettős integrál. Speciális eset.

R téglalap. $R = [a, b] \times [c, d]$. Az $[a, b]$-t osszuk n részre, $[c, d]$-t m részre. A felosztás elemszáma $N = nm$.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \ \Delta y = \frac{d-c}{m}.$$

A közelítő összeg

$$V_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

A kettős integrál, speciális eset (folyt.)

$R = [a, b] \times [c, d]$. Tfh $f(x, y) = A(x) \cdot B(y)$ <u>szeparálható</u>.

$$\iint_R A(x)B(y)\, d(x, y) = ?$$

Egyenletes felosztással:

$$V_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x\, \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A(\xi_i)B(\eta_j)\Delta x\, \Delta y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x \cdot \sum_{j=1}^{m} B(\eta_j)\Delta y.$$

Tehát ha n, $m \to \infty$:

$$\iint_R A(x)B(y)\, d(x, y) = \int_a^b A(x)dx \cdot \int_c^d B(y)dy.$$

Példa

Az integrálandó függvény $f(x,y) = e^{x-y}$.

Az integrálási tartomány $R = [0,1] \times [1,2]$.

Ekkor $e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y}$. Ezért

$$\iint_R e^{x-y} dR = \int_0^1 e^x dx \cdot \int_1^2 e^{-y} dy =$$

$$= (e-1) \cdot \left(-(e^{-2} - e^{-1}) \right) = (e-1)\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)$$

Tulajdonságok. I.

Állítás. Tfh $f(x,y)$ integrálható R-en. Ekkor

1. $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $c\,f(x,y)$ integrálható, és
$$\iint\limits_R cf(x,y)dR = c\iint\limits_R f(x,y)dR$$
2. Ha g integrálható R-en, akkor $f+g$ is, és
$$\iint\limits_R (f+g)dR = \iint\limits_R fdR + \iint\limits_R gdR.$$
3. Ha $R = R_1 \cup R_2$, ahol R_1, R_2 *nem átfedőek*,akkor
$$\iint\limits_R fdR = \iint\limits_{R_1} fdR_1 + \iint\limits_{R_2} fdR_2.$$

3a. Speciálisan, ha $A(R_2) = 0$, akkor: $\displaystyle\iint\limits_R fdR = \iint\limits_{R_1} fdR_1.$

Tulajdonságok. II.

4. Ha $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in R$-re, akkor
$$\iint\limits_R f(x,y)dR \geq 0.$$

5. Ha $f(x,y) \geq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in R$-re , akkor
$$\iint\limits_R f(x,y)dR \geq \iint\limits_R g(x,y)dR.$$

Következmény. (*Háromszög egyenlőtlenség*)
$$\iint\limits_R |f(x,y)|dR \geq \left| \iint\limits_R f(x,y)dR \right|,$$

U.i $|f(x,y)| \geq f(x,y)$ és $|f(x,y)| \geq -f(x,y)$.

Tulajdonságok. III.

Tétel. (*Integrál középértéktétel*)

$f : R \to \mathbb{R}$ integrálható. Tegyük fel, hogy

$$m \leq f(x,y) \leq M \qquad \forall (x,y) \in R.$$

Ekkor

$$m \cdot A(R) \leq \iint_R f(x,y) dR \leq M \cdot A(R).$$

Továbbá ha f *folytonos* is, akkor $\exists (\xi, \eta) \in R$, hogy

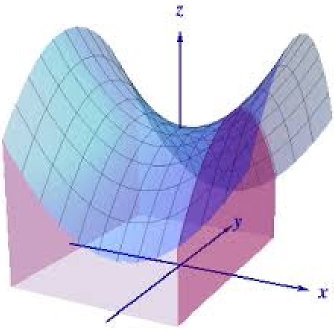
$$\iint_R f(x,y) dR = f(\xi, \eta) \cdot A(R).$$

Kettős integrál téglalapon

$R = [a, b] \times [c, d]$, $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható fv. (*tetszőleges...*)

Tétel. $\forall x \in [a, b]$ esetén:

$$\Psi(x) := \int_c^d f(x, y)dy.$$



Akkor $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható,

és $\displaystyle\int_a^b \Psi(x)dx = \iint_R f(x, y)\, dR.$

Fordítva, $\forall y \in [c, d]$ esetén legyen $\Phi(y) := \displaystyle\int_a^b f(x, y)dx$. Ekkor

$\Phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrálható és $\displaystyle\int_c^d \Phi(y)dy = \iint_R f(x, y)\, dR.$

Téglalapon: *"kettős integrál = kettő integrál"*

Tehát ha $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap-tartomány, akkor

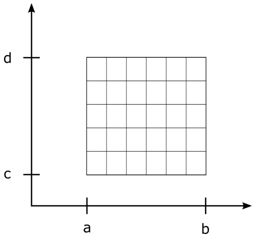
$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\ dx = $$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\ dy.$$

Megjegyzés. Az integrál kiértékelése "belülről-kívülre" megy,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\ dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right)\ dx.$$

Bizonyítás, vázlat.

$R = [a, b] \times [c, d]$. és Osszuk $[a, b]$-t n részre, $[c, d]$-t m részre.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \ \Delta y = \frac{d-c}{m}.$$

A közelítő összeg

$$V_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y \right) \Delta x \qquad \xrightarrow{m \to \infty}$$

$$\xrightarrow{m \to \infty} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) \Delta x.$$

Példa.

Legyen $f(x,y) = x^2 + 4y$, és $R = [-2,2] \times [1,3]$. Ekkor

$$\int_{-2}^{2} \int_{1}^{3} (x^2 + 4y)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \Big[x^2 y + 2y^2\Big]_{y=1}^{y=3} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (2x^2 + 16) dx = 2\left(\frac{16}{3} + 32\right).$$

Fordított sorrendben integrálva: ugyanez az eredmény. HF