Függvény rendszerek

2021. április 12.

Függvényrendszer invertálhatósága

Függvényrendszer és inverze

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$. $F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to \mathbb{R}^2$ vektormező:

$$F(x,y) = (\xi,\eta) \qquad \begin{array}{rcl} \xi & = & \Phi(x,y) \\ \eta & = & \Psi(x,y) \end{array}$$

Az F vektormező képtere:

$$B = \{(\xi,\eta) : \ \xi = \Phi(x,y), \eta = \Psi(x,y) : (x,y) \in R\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Tfh az $F : R \to B$ leképezés injektív. ($\Longrightarrow$ *bijektív* $\surd$)

Az inverz rendszer ilyen alakú lesz: $F^{-1} : B \to R$

$$F^{-1}(\xi,\eta) = (x,y) \qquad \begin{array}{rcl} x & = & g(\xi,\eta) \\ y & = & h(\xi,\eta) \end{array}$$

Invertálhatóság. Ism.

Tétel. Tfh $F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to \mathbb{R}^2$ differenciálható, és az $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} R$ pontban Jacobi mátrixa nem szinguláris.

$$\mathcal{J}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \Phi'_x(.) & \Phi'_y(.) \\ \\ \Psi'_x(.) & \Psi'_y(.) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} \Phi(x_0, y_0) \\ \\ \operatorname{grad} \Psi(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor F az (x_0, y_0) egy <u>környezetében</u> invertálható.

Sőt, az inverz rendszer is deriválható, és Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = (\mathcal{J}(x, y))^{-1}, \qquad (x, y) \longleftrightarrow (\xi, \eta)$$

Példák

1. Homogén lineáris leképezés (folyt.)

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A rendszer invertálható $\Longleftrightarrow$ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

2. Descartes koordináták vs. polár koordináták: $(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta)$

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & r(-\sin(\theta)) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Jacobi determinánsa $\det(\mathcal{J}) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = D(r,\theta) = r.$

Ezért az origó környezetében NINCS inverz, de másutt van.