Differenciálható függvények tulajdonságai.

2021. március 24.

Lagrange-féle középérték tétel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ismétlés.

Tétel.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tfh f folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n.

Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$, melyre:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ekvivalens állítás: A fenti feltételekkel

$$\exists \theta \in (0, 1) : \qquad f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a).$$

A kapcsolat: $\xi \in (a, b) \iff \xi = a + \theta(b - a)$, ahol $\theta \in (0, 1)$

Lagrange-féle középértéktétel két dimenzióban.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad \exists \theta \in (0,1) : \xi = a + \theta(b-a)$$

Tétel. $S \subset \mathbb{R}^2$. Tfh $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható, $(x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$.

Tfh $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (x, y) \in S$.

Ekkor $\exists \theta \in (0,1)$, melyre:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f'_x(x_\theta, y_\theta)\Delta x + f'_y(x_\theta, y_\theta)\Delta y = \\ &= \mathrm{grad}\ f(x_\theta, y_\theta) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ahol $(x_\theta, y_\theta) = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$.

Lagrange-féle középértéktétel n dimenzióban

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós differenciálható függvény. $x_0 \in S$

Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ olyan megváltozás, melyre $(x_0 + h) \in S$.

Ekkor létezik $\theta \in (0,1)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{grad}\; f(x_0 + \theta h) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_\theta) h_i,$$

ahol $x_\theta = x_0 + \theta h$.

Bizonyítás

Vezessünk be egy valós függvényt, F : "$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$":

$$F(t) := f(x_0 + th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n).$$

Ekkor $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diff-ható, és $F(0) = f(x_0)$, $F(1) = f(x_0 + h)$.

Alkalmazzuk az egyváltozós Lagrange-féle középérték tételt:

$$\exists \theta \in (0,1), \quad F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

$F(t) = f(x_0 + th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$ deriváltja:

$$F'(t) = f'_{x_1}(x_0 + th)\ h_1 + \ldots + f'_{x_n}(x_0 + th)\ h_n,$$

$$\Longrightarrow \quad F'(\theta) = f'_{x_1}(x_\theta)\ h_1 + \ldots + f'_{x_n}(x_\theta)\ h_n, \quad x_\theta = x_0 + \theta h. \quad \surd$$

Következmény.

Tfh $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex (vagyis ...), $f : S \to \mathbb{R}$ differenciálható.

Tfh $\mathrm{grad}\ f(x) = 0\ \forall x \in S$-re.

Ekkor a függvény konstans.

Biz. $x, x' \in S$ tetszőleges. $\exists \theta \in (0, 1)$

$$f(x) - f(x') = \mathrm{grad}\ f(x + \theta(x - x')) \cdot (x - x').$$

A konvexitás miatt $x + \theta(x - x') \in S$. Így

$$\mathrm{grad}\ f(x + \theta(x - x')) = 0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \Longrightarrow f(x) = f(x').$$

Megjegyzés. A fenti állítás összefüggő S tartományra is igaz (*HF: Miért?*)

Taylor formula magasabb dimenzióban

Egy feladat

$f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $(x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$.

Tfh f "elegendően sokszor" differenciálható (x_0, y_0)-ban.

Adjunk becslést az (x_0, y_0)-*beli deriváltakkal:*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx ?$$

1. válasz. *Érintő sík* $\equiv$ elsőfokú Taylor-polinom:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Magasabb fokú Taylor polinom? Segít az egyváltozós eset:

$$F(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad \Delta x = x - x_0, \ \Delta y = y - y_0.$$

Ekkor $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$.

Másodfokú Taylor polinom?

$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, és $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$

A másodfokú Taylor formula alapján ezt kapjuk:

$$F(1) - F(0) \approx F'(0)(1-0) + \frac{1}{2}F''(0)(1-0)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx F'(0) + \frac{1}{2}F''(0).$$

$$F'(t) = f'_x(x_t, y_t)\Delta x + f'_y(x_t, y_t)\Delta y = \mathrm{grad}\ f(x_t, y_t)\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}$$

$$F''(t) = f''_{xx}(x_t, y_t)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_t, y_t)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_t, y_t)(\Delta y)^2 = ?$$

$$= (\Delta x,\ \Delta y) \cdot \begin{pmatrix} f''_{xx}(.) & f''_{yx}(.) \\ f''_{xy}(.) & f''_{yy}(.) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} \quad \text{(kvadratikus alak).}$$

Másodfokú Taylor polinom, végeredmény

Összegezve:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx F'(0) + \frac{1}{2}F''(0).$$

$F(t)$ deriváltjait behelyettesítve:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \mathrm{grad}\ f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta x,\ \Delta y) \cdot H_0 \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix},$$

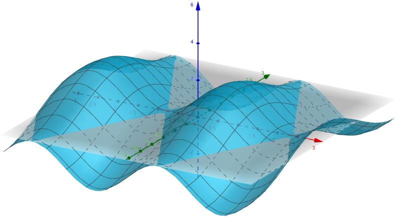
ahol $H_0 = H(x_0, y_0)$ a Hesse-mátrix.

Megjegyzés. Az n-ed rendű Taylor formula a *Jegyzetben* megnézhető.

Taylor polinomok meghatározása. Példa

$f(x,y) = \sin(2x) + \cos(y)$.

Írjuk fel $f(x,y)$ első és másod-fokú *Taylor polinomját* a $(0,0)$ körül.



Elsőrendő parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 2\cos(2x), \quad f'_y(x,y) = -\sin(y).$$

$$\Longrightarrow \quad f(0,0) = 1, \qquad f'_x(0,0) = 2, \qquad f'_y(0,0) = 0.$$

Az első fokú Taylor polinom (érintősík):

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) = 1 + 2x$$

$f(x,y) = \sin(2x) + \cos(y)$. A másodrendő parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = -4\sin(2x), \quad f''_{yy}(x,y) = -\cos(y), \quad f''_{xy}(x,y) = 0.$$

$$\implies \quad f''_{xx}(0,0) = 0, \quad f''_{yy}(0,0) = -1, \quad f''_{xy}(0,0) = 0.$$

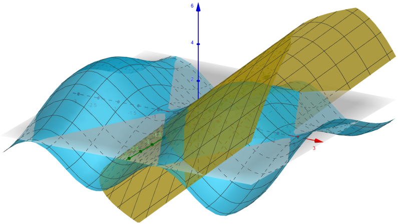
A másodfokú Taylor polinom: $T_2(x,y) =$

$$T_1(x,y) + \frac{f''_{xx}(0,0)}{2}(x-0)^2 + f''_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2}(y-0)^2$$

$$\implies \quad T_2(x,y) =$$

$$1 + 2x + \frac{0}{2}x^2 + 0 \cdot xy - \frac{1}{2}y^2 =$$

$$= 1 + 2x - \frac{y^2}{2}.$$



Első fokú Taylor polinom n dimenzióban, hibabecsléssel

$f : S \to \mathbb{R}$ n-változós, kétszer differenciálható függvény, $x_0 \in S$.

Állítás. Ekkor $\forall x = x_0 + h \in S$ esetén

$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{grad}\ f(x_0) \cdot h + L_1,$$

ahol $h^T = (h_1, \ldots, h_n)$, $\mathrm{grad}\ f(x_0) = (f'_{x_1}(x_0), \ldots, f'_{x_n}(x_0))$.

Továbbá a Lagrange-féle maradéktag így írható:

$$L_1 = \frac{1}{2} h^T \left(\int_0^1 (1-t)\ H(x_0 + th)\ dt \right) h.$$

Másodfokú Taylor polinom n dimenzióban

$f : S \to \mathbb{R}$ n-változós, kétszer differenciálható függvény, $x_0 \in S$.

Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ olyan megváltozás, melyre $(x_0 + h) \in S$.

Ekkor a másodfokú Taylor polinom közelítés:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \mathrm{grad}\ f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot H_0 \cdot h,$$

ahol $H_0 = H(x_0)$ az x_0 pontbeli második derivált,

az x_0 ponthoz tartozó $n \times n$ dimenziós Hesse mátrix.

Függvényrendszerek

Vektormező

"Egyszerre több függvényt tekintünk"

Definíció. Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, és két valós függvény,

$\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$. A FÜGGVÉNYRENDSZER:

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y). \end{aligned}$$

Az $F : R \to \mathbb{R}^2$ leképezést, melyre

$$F : (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = F(x, y)$$

VEKTORMEZŐ-nek nevezzük.

$F : R \to \mathbb{R}^2$ KOORDINÁTAFÜGGVÉNYEI: $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$

1. Példa

Egy homogén lineáris leképezés:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy, \end{aligned}$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ adottak. Ez $\mathbb{R}^2$-beli lineáris transzformáció.

Tömören:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Példa

Polárkoordináták és Descartes koordináták közötti kapcsolat:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{array} .$$

Legyen $R = \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$.

A vektormező $F : R \to \mathbb{R}^2$,

$$F(r, \theta) = (x, y).$$

Deriválhatóság

Függvényrsz: $\begin{array}{rcl} \xi & = & \Phi(x,y) \\ \eta & = & \Psi(x,y) \end{array}$ Vektormező: $F : (x,y) \mapsto (\xi, \eta)$

Definíció. $F : R \to \mathbb{R}^2$ DIFFERENCIÁLHATÓ, ha koordinátafüggvényei $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$ differenciálhatók.

A derivált JACOBI MÁTRIX:

$$\mathcal{J}(x,y) := \begin{pmatrix} \Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y) \\ \Psi'_x(x,y) & \Psi'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} \Phi(x,y) \\ \operatorname{grad} \Psi(x,y) \end{pmatrix}.$$

A $\mathcal{J}(x,y)$ mátrix determinánsa a JACOBI DETERMINÁNS:

$$D(x,y) := \Phi'_x(x,y)\Psi'_y(x,y) - \Psi'_x(x,y)\Phi'_y(x,y).$$

A Jacobi determináns formális jelölése: $D(x,y) = \dfrac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)}$.

Invertálhatóság

Az $F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to \mathbb{R}^2$ vektormező képtere:

$$B = \{(\xi, \eta) : \ \xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y) : (x, y) \in R\}.$$

Tegyük fel, hogy az $F : R \to B$ leképezés injektív.

Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$F^{-1} : B \to R, \qquad \begin{array}{rcl} x & = & g(\xi, \eta) \\ y & = & h(\xi, \eta) \end{array} .$$

Az inverz leképezés differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatók.

$$\begin{aligned} x &= g(\xi, \eta) \\ y &= h(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi, \eta) & g'_\eta(\xi, \eta) \\ & \\ h'_\xi(\xi, \eta) & h'_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

Függvényrendszer inverze

Tétel. Tfh $F : R \to \mathbb{R}^2$ differenciálható, és az $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} R$ pontban Jacobi mátrixa nem szinguláris.

Ekkor F az (x_0, y_0) egy környezetében invertálható.

Sőt, az inverz rendszer is deriválható, és Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = (\mathcal{J}(x, y))^{-1}, \qquad (x, y) \longleftrightarrow (\xi, \eta)$$

Speciálisan, a *Jacobi determinánsok*ra:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}}.$$

Analógia

Valós inverz-függvény deriváltja: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad y \longleftrightarrow x.$

A kétváltozós függvényrendszer $\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to S,$ és ennek

derivált-mátrixa: $\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \Phi'_x(.) & \Phi'_y(.) \\ \Psi'_x(.) & \Psi'_y(.) \end{pmatrix}.$

Az inverzfüggvény $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} : S \to R,$ és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} g'_\xi(.) & g'_\eta(.) \\ \\ h'_\xi(.) & h'_\eta(.) \end{pmatrix} = (\mathcal{J}(x,y))^{-1} \quad (x,y) \longleftrightarrow (\xi,\eta).$$

1. Példa

A homogén lineáris leképezés

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy \end{aligned}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{ahol } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A Jacobi mátrix konstans:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ezért a Jacobi determináns:

$$D = \det(A) = ad - bc.$$

A leképezés invertálható, ha A nem szinguláris: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.