Szélsőérték számítás 3. rész

2021. március 22.

Feltételes szélsőérték.

Abszolút szélsőérték

FELTÉTELES szélsőérték

Feltételes optimalizálás feladata

Feltételes optimalizálás feladata

Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények.

Feltételes optimalizálás feladata

Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények. f minimumát keressük az

Feltételes optimalizálás feladata

Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények. f minimumát keressük az $R = \{(x, y) \ : \ g(x, y) = 0\}$ halmazon.

Feltételes optimalizálás feladata

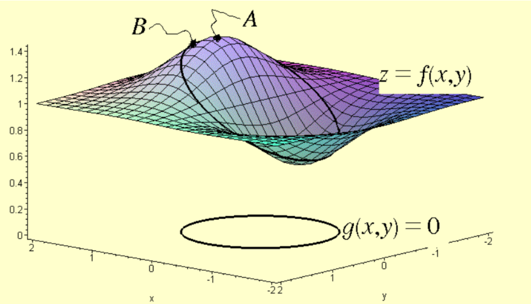
Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények. f minimumát keressük az $R = \{(x, y) \;:\; g(x, y) = 0\}$ halmazon.

$$\boxed{\min_{\{g(x,y)=0\}} f(x, y) = ?}$$

Feltételes optimalizálás feladata

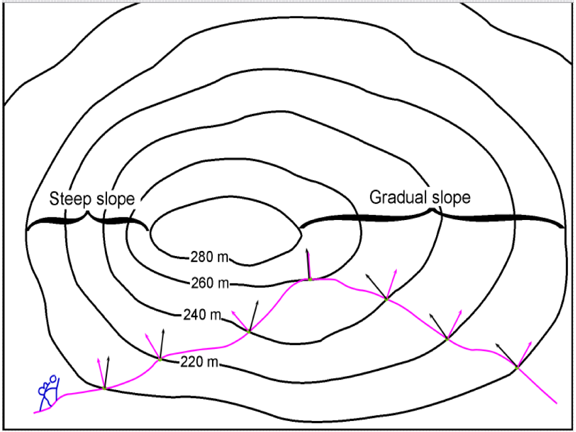
Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények. f minimumát keressük az $R = \{(x, y) \ : \ g(x, y) = 0\}$ halmazon.

$$\boxed{\min_{\{g(x,y)=0\}} f(x, y) = ?}$$



Kicsit másképp:

Kicsit másképp:



Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban

  feltételes szélsőértéke van a $\phi(x,y) = 0$ feltétel mellett.

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban <u>feltételes szélsőértéke</u> van a $\phi(x,y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\operatorname{grad} \phi(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőértéke van a $\phi(x,y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőértéke van a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Ekkor $\exists\lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0\phi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőértéke van a $\phi(x,y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)?$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y).$$

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)? \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)?$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)? \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)?$$

$\longrightarrow$ helyette F függvény *feltétel nélküli* szélsőérték-feladata:

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)? \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)?$$

$\longrightarrow$ helyette F függvény *feltétel nélküli* szélsőérték-feladata:

$$\operatorname{grad} F(x, y, \lambda) = (0, 0, 0).$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőértéke van a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett.

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban <u>feltételes szélsőértéke</u> van a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőértéke van a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre (x_0, y_0, λ_0) stacionárius pontja az $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$ függvénynek:

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban <u>feltételes szélsőértéke</u> van a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\operatorname{grad} \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre (x_0, y_0, λ_0) stacionárius pontja az $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$ függvénynek:

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0).$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály (folyt)

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőértéke van a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett.
- Tfh $\operatorname{grad} \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre (x_0, y_0, λ_0) stacionárius pontja az $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$ függvénynek:

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0).$$

Megjegyzés. Csak *szükséges* feltétel!

Példa

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén.

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}$$

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy|$$

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy| \qquad \Longrightarrow \quad |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

Példa

$f(x,y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = |xy| \qquad \Longrightarrow \quad |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}.$$

A Lagrange függvény:

$$F(x,y,\lambda) =$$

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy| \qquad \Longrightarrow \quad |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

A Lagrange függvény:

$$F(x, y, \lambda) = xy -$$

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum. *(Miért?)*

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy| \qquad \Longrightarrow \quad |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

A Lagrange függvény:

$$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) \quad =$$

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = y - 2\lambda x = 0, \tag{1}$$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$
\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x = 0, && (1)\\
F'_y(x,y,\lambda) &=
\end{aligned}
$$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$F'_x(x,y,\lambda) = y - 2\lambda x = 0, \tag{1}$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = x - 2\lambda y = 0, \tag{2}$$

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1) \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= \end{aligned}$$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$F'_x(x,y,\lambda) = y - 2\lambda x = 0, \tag{1}$$

$$F'_y(x,y,\lambda) = x - 2\lambda y = 0, \tag{2}$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \tag{3}$$

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x = 0, \quad (1) \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y = 0, \quad (2) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból:

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1) \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. & (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \dfrac{y}{2x}$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$F'_x(x,y,\lambda) = y - 2\lambda x = 0, \qquad (1)$$

$$F'_y(x,y,\lambda) = x - 2\lambda y = 0, \qquad (2)$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \qquad (3)$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1) \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2) \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. & (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \implies x^2 = y^2$

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1) \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. & (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2}$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x = 0, \qquad (1) \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y = 0, \qquad (2) \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

Négy stacionárius pontot kapunk:

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1) \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2) \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. & (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2}$

Négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$f(x, y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x = 0, && (1) \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y = 0, && (2) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. && (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2}$

Négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1)\\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2)\\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. & (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ből: $\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

Négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$f(x,y) = xy$ szélsőértékei, ha $x^2 + y^2 - 1 = 0$?

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Lagrange fv stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x = 0, && (1)\\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y = 0, && (2)\\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. && (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból: $\lambda = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2}$

Négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x_4, y_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

A stacionárius pontok:

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$,

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

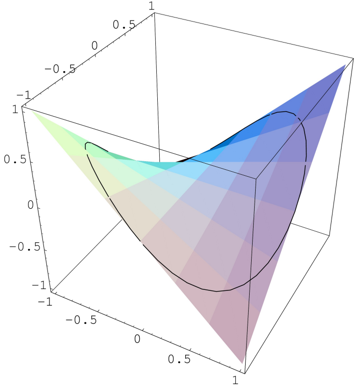
$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2},$$

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$

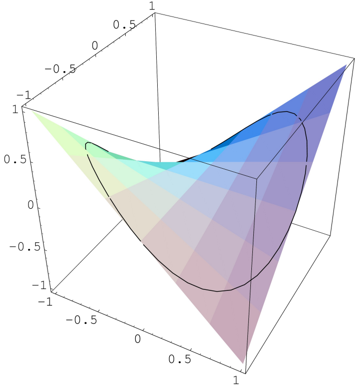
A stacionárius pontok: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, a függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$



A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

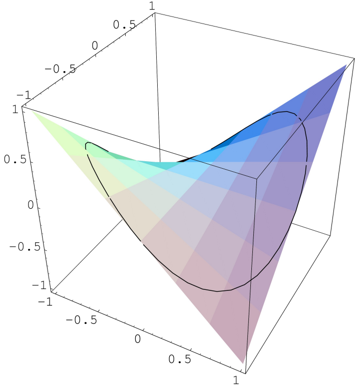
$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$



Mivel $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}$,

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$

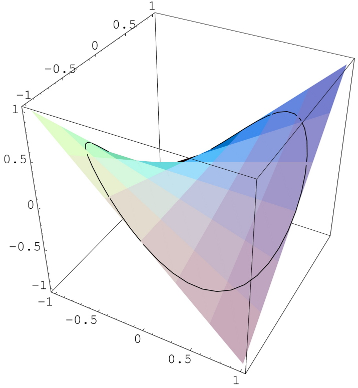


Mivel $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}$,

$$\Downarrow$$

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)=\frac{1}{2},\quad f(x_3,y_3)=f(x_4,y_4)=-\frac{1}{2}.$$



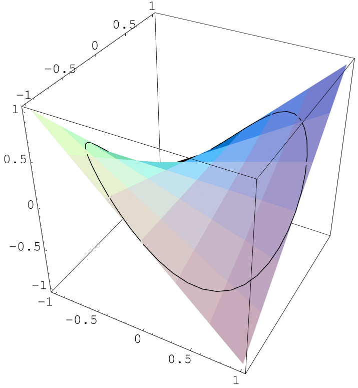
Mivel $|f(x,y)|\le\frac{1}{2}$,

$$\Downarrow$$

$f(x_1,y_1)$, $f(x_2,y_2)$: max,

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$



Mivel $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}$,

$$\Downarrow$$

$f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$: max,

$f(x_3, y_3)$ és $f(x_4, y_4)$: min.

Feltételes szélsőérték.

Abszolút szélsőérték

ABSZOLÚT szélsőérték

Egyváltozós függvény, ismétlés

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható.

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) =? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) =?$$

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$.

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) =? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) =?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$, a határpontok.

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(Van minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$, a határpontok.

Befejező lépés:

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$, a határpontok.

Befejező lépés: A "jelöltek" összehasonlítása.

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$, a határpontok.

Befejező lépés: A "jelöltek" összehasonlítása.

$$\min / \max\{f(x_0),$$

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$, a határpontok.

Befejező lépés: A "jelöltek" összehasonlítása.

$$\min / \max\{f(x_0), f(a),$$

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$. Ezek belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$, a határpontok.

Befejező lépés: A "jelöltek" összehasonlítása.

$$\min / \max\{f(x_0), f(a), f(b)\} = ?$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték?

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) = ? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) = ?$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1,\eta_1) = ? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2,\eta_2) = ?$$

A szélsőérték "jelöltek":

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) = ? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) = ?$$

A szélsőérték "jelöltek":

1. $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) =? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) =?$$

A szélsőérték "jelöltek":

1. $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}\, S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Belső pontok, lokális szélsőértékek.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) =? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) =?$$

A szélsőérték "jelöltek":

1. $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}\, S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Belső pontok, lokális szélsőértékek.
2. $f(x,y)$, ha $(x,y) \in \partial S$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) = ? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) = ?$$

A szélsőérték "jelöltek":

1. $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Belső pontok, lokális szélsőértékek.

2. $f(x, y)$, ha $(x, y) \in \partial S$. Ez túl sok pont!

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték? VAN

$$\min_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) = ? \qquad \max_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) = ?$$

A szélsőérték "jelöltek":

1. $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Belső pontok, lokális szélsőértékek.
2. $f(x, y)$, ha $(x, y) \in \partial S$. Ez túl sok pont!

   Helyette $f\big|_{\partial S}$: Feltételes szélsőérték?

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

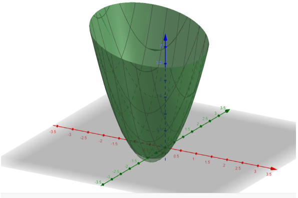
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

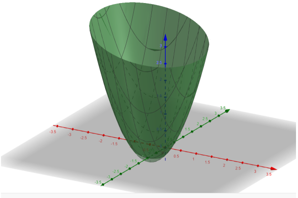
$$S = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$

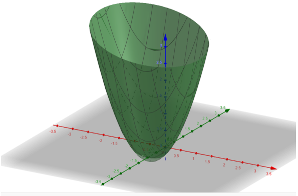


1. lépés.

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$

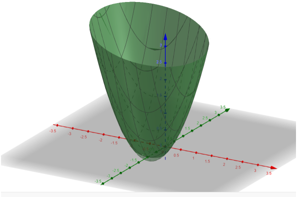


1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



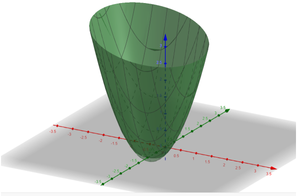
1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$f'_x(x, y) \quad = \quad 2x + y + 1 = 0,$$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



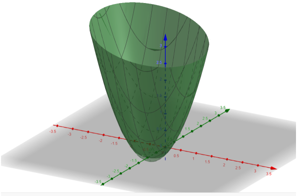
1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned}$$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



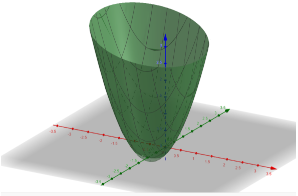
1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) =$$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



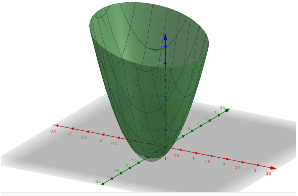
1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \implies P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

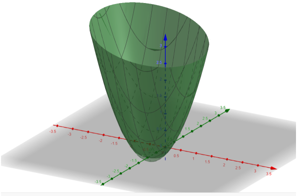
$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H =$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

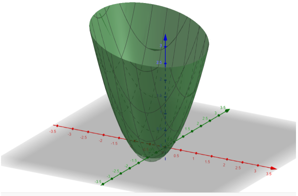
$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \Bigg($

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

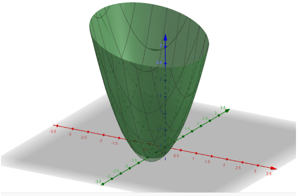
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \left(\begin{matrix} 2 \\ \end{matrix} \right.$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

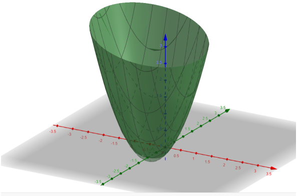
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ & \end{matrix} \right.$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

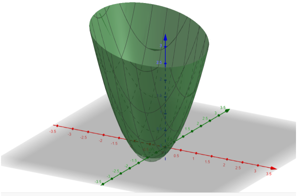
$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \implies P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right.$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x, y) \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

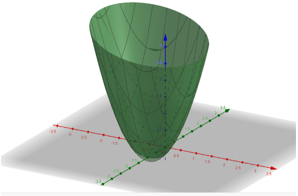
$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x, y) \; : \; x^2 + y^2 \le 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

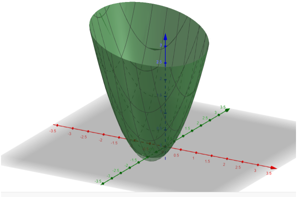
$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0,$

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

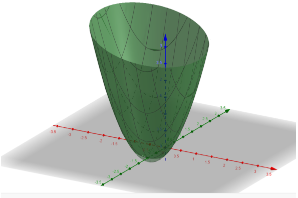
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

A Hesse mátrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, ezért P_0 lokális

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



1. lépés. Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, ezért P_0 lokális minimum.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2+y^2-1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$F'_x(x,y,\lambda) \quad =$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$F'_x(x,y,\lambda) \quad = \quad 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0,$$

$f(x,y)=x^2+xy+y^2+x+y$. $S=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2+xy+y^2+x+y=?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda)=x^2+xy+y^2+x+y-\lambda(x^2+y^2-1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x+y+1-2\lambda x=0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= \end{aligned}$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \end{aligned}$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\
F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\
F'_\lambda(x,y,\lambda) &=
\end{aligned}$$

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y - yF'_x =$$

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y - yF'_x = x(x + 2y + 1 - 2\lambda y) -$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y - yF'_x = x(x + 2y + 1 - 2\lambda y) - y(2x + y + 1 - 2\lambda x) = 0.$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y - yF'_x = x(x + 2y + 1 - 2\lambda y) - y(2x + y + 1 - 2\lambda x) = 0.$$

Kis átrendezéssel:

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y - yF'_x = x(x + 2y + 1 - 2\lambda y) - y(2x + y + 1 - 2\lambda x) = 0.$$

Kis átrendezéssel: $x^2 + x = y^2 + y \quad \Longrightarrow$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}$

2. lépés. Feltételes szélsőérték a HATÁRON:

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabályt használunk.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y - yF'_x = x(x + 2y + 1 - 2\lambda y) - y(2x + y + 1 - 2\lambda x) = 0.$$

Kis átrendezéssel: $x^2 + x = y^2 + y \implies (y - x)(y + x + 1) = 0.$

Az előző oldalról: $(y - x)(y + x + 1) = 0$.

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Az előző oldalról: $(y - x)(y + x + 1) = 0$. *Feltétel:* $x^2 + y^2 = 1$.

1.) $x = y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{és} \quad P_2(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{és} \quad P_2(x_2,y_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{és} \quad P_2(x_2,y_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3,y_3)=(0,-1)$$

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x = y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{és} \quad P_2(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

2.) $x = -y - 1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3, y_3) = (0, -1) \quad \text{és} \quad P_4(x_4, y_4) = (-1, 0)$$

Az előző oldalról: $(y - x)(y + x + 1) = 0$. *Feltétel:* $x^2 + y^2 = 1$.

1.) $x = y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{és} \quad P_2(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

2.) $x = -y - 1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3, y_3) = (0, -1) \quad \text{és} \quad P_4(x_4, y_4) = (-1, 0)$$

Végül összehasonlítás:

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{és} \quad P_2(x_2,y_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3,y_3)=(0,-1) \quad \text{és} \quad P_4(x_4,y_4)=(-1,0)$$

Végül összehasonlítás: $f(P_0)=-\frac{1}{3}$,

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{és} \quad P_2(x_2,y_2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3,y_3)=(0,-1) \quad \text{és} \quad P_4(x_4,y_4)=(-1,0)$$

Végül összehasonlítás: $f(P_0)=-\frac{1}{3}$,

$$f(P_1)=\frac{3}{2}+\sqrt{2},$$

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{és} \quad P_2(x_2,y_2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3,y_3)=(0,-1) \quad \text{és} \quad P_4(x_4,y_4)=(-1,0)$$

Végül összehasonlítás: $f(P_0)=-\frac{1}{3}$,

$$f(P_1)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}, \quad f(P_2)=\frac{3}{2}-\sqrt{2},$$

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. *Feltétel:* $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$$P_1(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{és} \quad P_2(x_2,y_2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$$P_3(x_3,y_3)=(0,-1) \quad \text{és} \quad P_4(x_4,y_4)=(-1,0)$$

Végül összehasonlítás: $f(P_0)=-\frac{1}{3}$,

$$f(P_1)=\frac{3}{2}+\sqrt{2}, \quad f(P_2)=\frac{3}{2}-\sqrt{2}, \quad f(P_3)=f(P_4)=1.$$

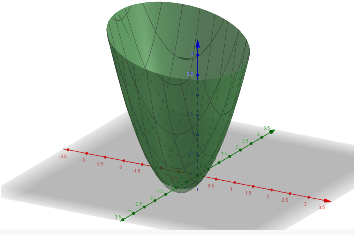
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

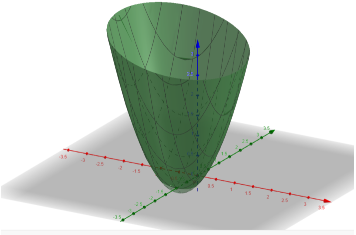
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

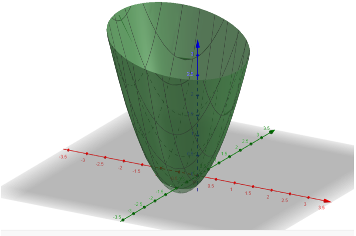
$$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



$$f(x_0, y_0) = -\frac{1}{3},$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

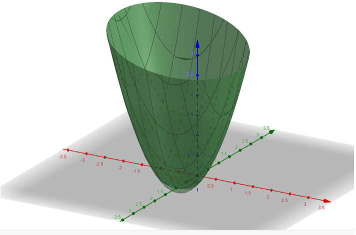
$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$



$$f(x_0,y_0) = -\frac{1}{3}, \quad f(x_1,y_1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$

$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$

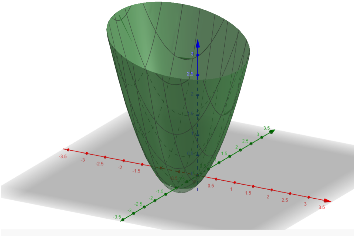


$$f(x_0,y_0) = -\frac{1}{3}, \quad f(x_1,y_1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f(x_2,y_2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

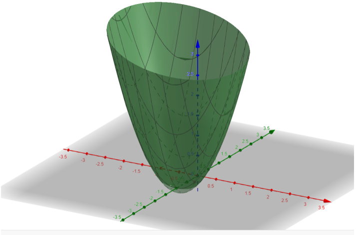


$$f(x_0,y_0) = -\frac{1}{3}, \quad f(x_1,y_1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f(x_2,y_2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad f(x_3,y_3) = f(x_4,y_4) = 1.$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



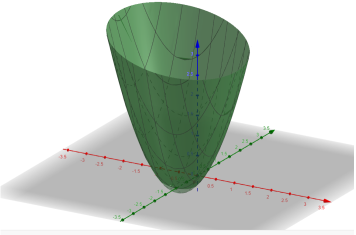
$$f(x_0,y_0) = -\frac{1}{3}, \quad f(x_1,y_1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f(x_2,y_2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad f(x_3,y_3) = f(x_4,y_4) = 1.$$

A minimum $f(P_0) = -1/3$,

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 1\}.$$



$$f(x_0,y_0) = -\frac{1}{3}, \quad f(x_1,y_1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f(x_2,y_2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad f(x_3,y_3) = f(x_4,y_4) = 1.$$

A minimum $f(P_0) = -1/3$, a maximum $f(P_1) \approx 2.91$.