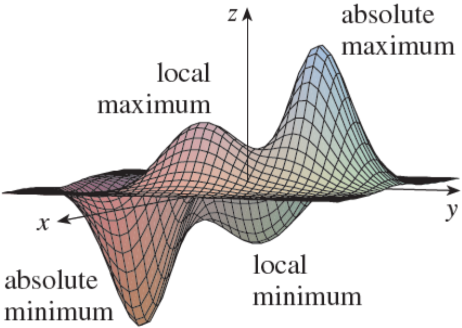
Szélsőérték számítás 2. rész

2021. március 17.

Szélsőérték



Tétel. (*Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére*)

Tfh az f függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van,

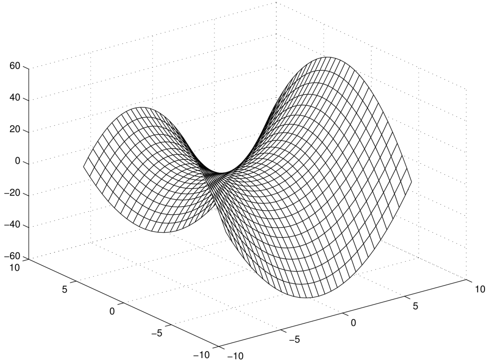
és f differenciálható. Ekkor

$$\mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) = (0, 0), \quad \text{azaz} \quad f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Nyereg pont

Definíció. Azt az (x_0, y_0) stacionárius pontot, ahol nincs szélsőérték, NYEREGPONT-nak nevezzük.

Példa. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.



Ismétlés, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lokális szélsőérték, elégséges feltétel

Tétel. f kétszer differenciálható.

Tegyük fel, hogy $f'(x_0) = 0$ (stacionárius pont), akkor:

1. ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 *lokális minimum*,
2. ha $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 *lokális maximum*,
3. ha $f''(x_0) = 0$, akkor *nem eldönthető*, vajon van-e szélsőérték.

Kérdés. Hasonló feltétel van-e kétváltozós függvényre?

f *kétváltozós*. Elégséges feltétel lokális szélsőértékre.

Tétel. Tfh. f kétszer differenciálható D-ben. $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D$.

Tfh $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Hesse mátrixa az adott pontban H_0:

$$H_0 = H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

1. Ekkor ha $\det H_0 > 0$, akkor (x_0, y_0)-ban VAN lokális szélsőérték.

2. Ekkor ha $\det H_0 < 0$, akkor (x_0, y_0)-ban NINCS lokális szélsőérték.

(Megjegyzés. Új típusú info: NINCS)

Tétel. (folytatás.)

A $H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(.) & f''_{yx}(.) \\ f''_{xy}(.) & f''_{yy}(.) \end{pmatrix}$ Hesse mátrix determinánsa:

$$D_0 := \det(H_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy})^2(x_0, y_0).$$

1. Ha $D_0 > 0$, akkor a pontban lokális szélsőérték VAN.
   - Ha emellett $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor lokális MINIMUM,
   - ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor lokális MAXIMUM.
   - Mit mondhatunk, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) = 0$?
2. Ha $D_0 < 0$, akkor nincs szélsőérték.
3. Ha $D_0 = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.

Kiegészítés. $D_0 > 0$ esetben lokális szélsőérték VAN.

Ennek típusát eldönthetjük így is:

- Ha $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$, akkor lokális MINIMUM,
- ha $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$, akkor lokális MAXIMUM.

Tehát *pozitív determináns* esetén

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

"bal felső" vagy "jobb alsó" bármelyike dönt: *minimum* vagy *maximum*.

1. Példa

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

A stacionárius pontok:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

A második deriváltak konstansok:

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \qquad f''_{yy}(x,y) = 2, \qquad f''_{xy}(x,y) = 1.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det H = 3 > 0,$$

ezért a stacionárius pont lokális minimum.

2. Példa

$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Stacionárius pontok?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 = 2x - 3y, \\ f'_y(x,y) &= 0 = -3x + 2y, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0) = (0,0).$$

(Tipp?) A Hesse mátrix:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

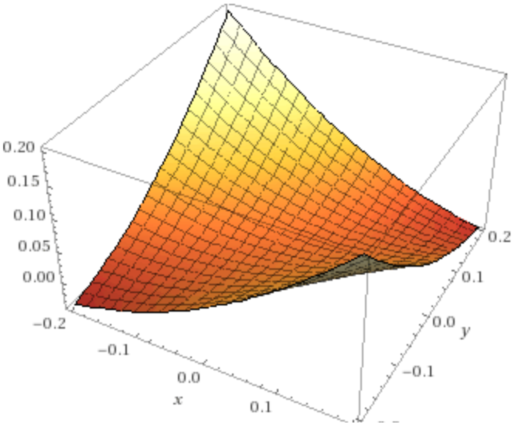
$\det H = -5 < 0$.

A függvénynek *NINCS* lokális szélsőértéke (x_0, y_0)-ban.

2. Példa (folyt.)

$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

$\longrightarrow$ A függvénynek nincs lokális szélsőértéke.



Kitekintés $\mathbb{R}^n$-re

Folytatás

Szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, a függvény differenciálható.

Tfh $x_0 \in \mathrm{int} S$-ban lokális szélsőértéke van. Ekkor

$$\mathrm{grad}\ f(x_0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^n).$$

(Elnevezés: x_0 STACIONÁRIUS pont.)

Más szóval, részletesen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

Emlékeztető

Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix

- POZITÍV DEFINIT, ha $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T Ax > 0$. Jelölés $A > 0$,
- NEGATÍV DEFINIT, ha $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T Ax < 0$. Jelölés $A < 0$.
- INDEFINIT, ha $\exists x \in \mathbb{R}^n$: $x^T Ax > 0$ és $\exists y \in \mathbb{R}^n$: $y^T Ay < 0$.
- POZITÍV SZEMIDEFINIT ($A \geq 0$), ill. NEGATÍV SZEMIDEFINIT ($A \leq 0$), ha $\forall x$-re $x^T Ax \geq 0$ ill. $x^T Ax \leq 0$

Szélsőérték létezésének elégséges feltétele

Tétel. $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. $x_0 \in \mathrm{int}(S)$ belső pont. Tfh $\mathrm{grad}\, f(x_0) = 0$.

A Hesse mátrix H, melyre $H_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

1. Ha $H > 0$, akkor x_0 lokális minimum.
2. Ha $H < 0$, akkor x_0 lokális maximum.
3. Ha H indefinit, akkor nincs szélsőérték.
4. Ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.

Újra $\mathbb{R}^2$-ben

Definit mátrixok

Speciális esetként: $n = 2$-re mit jelent a definitség?

Példaként tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.

- $A > 0$ (pozitív definit),
- $B < 0$ (negatív definit)
- C indefinit.

Emlékeztető Lineáris Algebrából.

Adott $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

1. Ekkor $A > 0$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$.

   Továbbá $A > 0 \iff ac - b^2 > 0$, és $a > 0$ $(c > 0)$.

2. Ekkor $A < 0$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$.

   Továbbá $A < 0 \iff ac - b^2 > 0$, és $a < 0$ $(c < 0)$.

3. Ekkor A indefinit ekvivalens azzal, hogy befejezés?

Definit mátrixok $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben.

Állítás. Legyen H_0 az f függvény Hesse mátrixa (x_0, y_0)-ban:

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \qquad \text{Ekkor}$$

1. $H_0 > 0 \iff \det(H_0) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
2. $H_0 < 0 \iff \det(H_0) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
3. H_0 indefinit $\iff \det(H_0) < 0$
4. $H_0 \leq 0$ vagy $H_0 \geq 0 \iff \det(H_0) = 0$

Megjegyzés. Az 1. és 2. pontban $f''_{yy}(x_0, y_0)$ is írható.

Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére (újra)

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$ f kétszer differenciálható. Tfh $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Hesse mátrixa $H_0 := H(x_0, y_0)$. Ekkor

- ha H_0 pozitív definit, akkor (x_0, y_0) lokális minimum,
- ha H_0 negatív definit, akkor lokális maximum,
- ha H_0 indefinit, akkor nincs szélsőértéke,
- ha H_0 szemidefinit, akkor lehet *van*, és lehet hogy *nincs* lokális szélsőértéke.

A Tételt nem bizonyítjuk.

Emlékeztető Lineáris Algebrából. Figyelem!

Adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

1. Ekkor $A > 0$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots \lambda_n > 0$.

   Továbbá $A > 0$ NEM ekvivalens azzal, hogy $\det(A) > 0$!

2. Ekkor $A < 0$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots \lambda_n < 0$.

3. Ekkor $A \geq 0$ ekvivalens azzal, hogy $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots \lambda_n \geq 0$.

4. *Vajon: A indefinit ...?*

FELTÉTELES szélsőérték

Minta feladat

Adott $\mathbb{R}^2$-ben egy $g(x, y) = 0$ görbe. Melyik pontja van az origóhoz a legközelebb?

$$\min(x^2 + y^2) =? \quad \text{ha} \quad g(x, y) = 0.$$

"Megoldás": $g(x, y) = 0$ alakból az egyik változó: $y = F(x)$, és

$$\min \left[x^2 + F^2(x)\right] =? \qquad x \in D_F$$

Hátránya:

- nem biztos, hogy *explicit* megoldást létezik, ill. ismerjük azt.
- önkényesen részesítjük előnyben az egyik változót.

Feltételes szélsőérték

Megoldás: közvetlen optimalizálás.

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$, és

$$R = \{(x, y) : \ g(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Az $f\big|_R$ megszorítását tekintjük, és itt keressük a szélsőértékét.

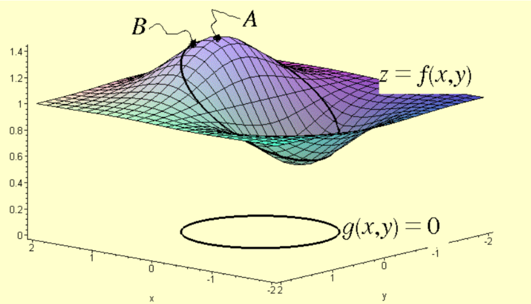
Nehézség: $\mathrm{int}(R) = \emptyset$

$\Longrightarrow$ az eddigi tételeket nem alkalmazhatjuk.

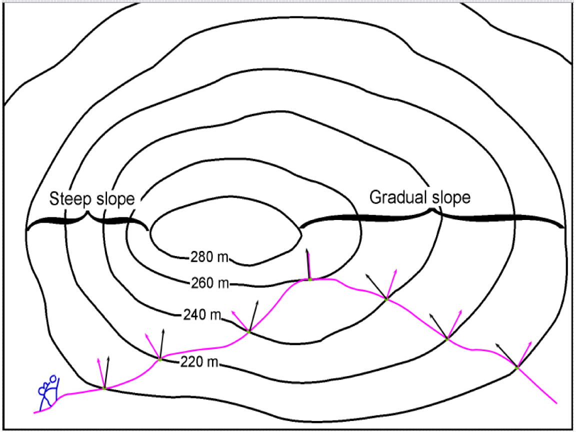
Feltételes optimalizálás feladata

Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények. f minimumát keressük az $R = \{(x, y) \ : \ g(x, y) = 0\}$ halmazon.

$$\boxed{\min_{\{g(x,y)=0\}} f(x, y) = ?}$$

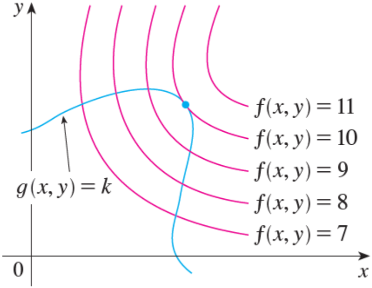


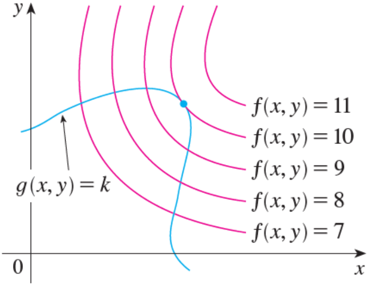
Kicsit másképp:



Szemléletesen, mit várunk?

$$\boxed{\min_{\{g(x,y)=k\}} f(x,y) = ?}$$





Melyik szintvonal metszi "utoljára" a $g(x, y) = k$ görbét? Ott az érintők megegyeznek, azaz

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)}.$$

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)} \iff \frac{f'_x(x, y)}{g'_x(x, y)} = \frac{f'_y(x, y)}{g'_y(x, y)} = \lambda.$$

Szemléletesen, ha (x, y) feltételes szélsőérték, akkor $\exists\lambda$:

$$f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0$$

Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- Tfh a differenciálható f függvénynek az (x_0, y_0) pontban

  feltételes szélsőértéke van a $\phi(x,y) = 0$ feltétel mellett.

- Tfh $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)? \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)?$$

$\longrightarrow$ helyette F függvény *feltétel nélküli* szélsőérték-feladata:

$$\operatorname{grad} F(x, y, \lambda) = (0, 0, 0).$$