Szélsőérték számítás

2021. március 10.

Szélsőérték

$f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$.

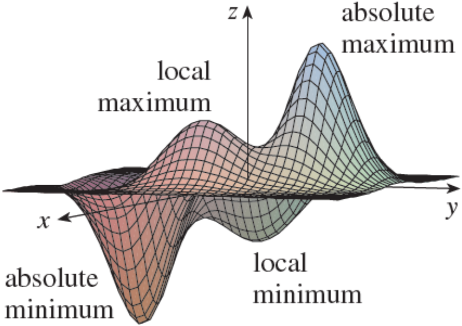
Definíció. (x_0, y_0) LOKÁLIS MAXIMUM (ill. minimum), ha $\exists U$ környezete a pontnak, hogy

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \qquad (ill.\ f(x,y) \ge f(x_0,y_0)), \quad \forall (x,y) \in U.$$

(x_0, y_0) GLOBÁLIS MAXIMUM (ill. minimum), ha

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \qquad (ill.\ f(x,y) \ge f(x_0,y_0)), \quad \forall (x,y) \in D_f.$$

Szélsőérték, ábra



Szélsőérték létezése

Weierstrass tétel $\Longrightarrow$ ha f folytonos, S korlátos és zárt, akkor VAN globális minimum és maximum.

Példa.

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Globális maximumhelyek: a $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ pontjai,

Egyetlen globális minimumhely: $(0, 0)$.

Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére

Tétel. Tfh az f függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van,

és f differenciálható. Ekkor

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

azaz $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Definíció. $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$ esetén (x_0, y_0)

STACIONÁRIUS (vagy kritikus) pont.

$\mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Szükséges feltétel, bizonyítás

Jelölje $f_1(x) := f(x, y_0)$ az egyik metszetfüggvényt. $\underline{y_0 \text{ fix.}}$

Tfh (x_0, y_0)-ban lokális *maximum* van. Ekkor $\exists U \subset \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y_0) \in U \cap D_f .$$

$U_0 := \{x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in U \cap D_f\}, \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) \leq f_1(x_0)\ \forall x \in U_0.$

Ekkor x_0 *lokális maximuma* f_1-nek,

$$\Longrightarrow \quad 0 = f_1'(x_0) = f_x'(x_0, y_0).$$

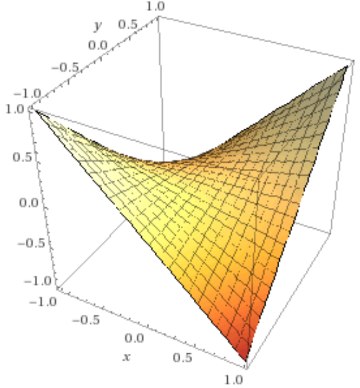
Lokális *minimum* esetén hasonló.

Példa. $f(x,y) = xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A parciális deriváltjak $f'_x(x,y) = y$ és $f'_y(x,y) = x$.

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \text{grad } f(0,0) = (0,0).$$

Az origó stacionárius pont, mégis nem szélsőérték.



$f(0,0) = 0$

az 1.és 3. síknegyedben

$f(x,y) > 0$

a 2. és 4. síknegyedben

$f(x,y) < 0$

Nyereg pont

Definíció. Azt az (x_0, y_0) stacionárius pontot, ahol nincs szélsőérték, NYEREGPONT-nak nevezzük.

Példa. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.