Kétváltozós függvények deriválása 4. rész

2021. március 10.

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^2$-ben, folytatás

Összetett függvény

Cél: *Láncszabály két dimenzióban*

Ismétlés. Láncszabály valós függvények esetén:

f a külső függvény, g a belső függvény. Tfh mindkettő differenciálható.

Ekkor

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x).$$

Láncszabály 2-dim-ban. 1. eset. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

A *külső függvény* $f(u)$, egyváltozós.

A *belső függvény* $u = \varphi(x, y)$, kétváltozós.

$\Longrightarrow$ Az összetett függvény $F(x, y) := f(\varphi(x, y))$, kétváltozós.

Tétel. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}$.

- Tfh $\varphi : S \to \mathbb{R}$ differenciálható az $(x, y) \in \operatorname{int} S$ pontban.
- Tfh $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható $u = \varphi(x, y)$-ban.

Akkor $F = f \circ \varphi$

$$F'_x(x, y) = f'(\varphi(x, y))\, \varphi'_x(x, y),$$

$$F'_y(x, y) = f'(\varphi(x, y))\, \varphi'_y(x, y).$$

$F(x,y) := f(\varphi(x,y))$ deriváltja. Bizonyítás.

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = f(\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y)) - f(\varphi(x,y)) = (*)$$

f differenciálható, ezért $f(u+\Delta u) - f(u) = f'(u)\,\Delta u + \varepsilon(\Delta u)$

$$\begin{aligned} (*) &= f'(\varphi(x,y)) \cdot \Delta\varphi(x,y) + \varepsilon = \\ &= f'(\varphi(x,y)) \cdot \left(\varphi'_x(x,y)\Delta x + \varphi'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} & F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \\ = \;& \left(f'(\varphi(x,y))\varphi'_x(x,y)\right)\Delta x + \left(f'(\varphi(x,y))\varphi'_y(x,y)\right)\Delta y + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

F differenciálható. A jobboldal fő tagja: $F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y$.

Példa

Legyen $F(x,y) = f^2(x,y)$, ahol $f(x,y)$ differenciálható fv.

Külső függvény $z = u^2$, belső függvény $u = f(x,y)$.

Ekkor $\left(u^2\right)' = 2u$, ezért

$$F'_x(x,y) = 2f(x,y)\ f'_x(x,y),$$

$$F'_y(x,y) = 2f(x,y)\ f'_y(x,y).$$

Láncszabály, 2.eset. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Külső függvény $f(x, y)$ kétváltozós.

Két belső függvény $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, egyváltozósak.

$\Longrightarrow$ Az összetett függvény: $F(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$, egyváltozós

Tétel. $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}$. $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$.

- Tfh φ, ψ differenciálhatóak a $t \in \operatorname{int} D$-ban.
- Tfh f differenciálható $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$-ben.

(Tfh $R_\varphi \times R_\psi \subset S$)

Ekkor az összetett függvény $F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható t-ben:

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

A fenti formula argumentumok nélkül: $\big(f \circ (\varphi, \psi)\big)' = f'_x\varphi' + f'_y\psi'$

Példa

Ism. f függvény α irány menti deriváltja (x_0, y_0)-ban

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t},$$

Legyenek

$$\varphi(t) := x_0 + t\cos\alpha, \quad \psi(t) := y_0 + t\sin\alpha,$$

$$F(t) = f(x + t\cos\alpha, y + t\sin\alpha) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

$$\Longrightarrow \quad D_\alpha f(x_0, y_0) = F'(0).$$

A láncszabály szerint

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\cos\alpha + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\sin\alpha.$$

Így $\qquad F'(0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$

Összetett függvény, 3.eset

Külső függvény $f(u, v)$ kétváltozós, ahol a helyettesítések:

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y).$$

Belső függvények $\psi, \varphi : R \to \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ kétváltozósak. Tfh.

$$R_\varphi \times R_\psi \subset D_f =: S.$$

Az összetett függvény $F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$,

$$F : R \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Példa. $F(x, y) = e^{xy} sin(x + y)$, mint összetett függvény:

$$u = \varphi(x, y) = xy, \quad v = \psi(x, y) = x + y, \quad f(u, v) = e^u \sin(v) \quad \Longrightarrow \surd$$

Láncszabály 3. eset. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Az összetett függvény $F(x,y) = f(\varphi(.), \psi(.))$ kétváltozós.

Tétel.

- Tfh φ, ψ differenciálhatók (x,y)-ban
- Tfh f differenciálható $(u,v) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$-ban.

Ekkor $F = f(\varphi, \psi)$ is differenciálható (x,y)-ban:

$$F'_x(x,y) = {f_u}'(\varphi(.), \psi(.))\, \varphi'_x(x,y) + f'_v(\varphi(.), \psi(.))\, \psi'_x(x,y),$$

$$F'_y(x,y) = f'_u(\varphi(.), \psi(.))\, \varphi'_y(x,y) + f'_v(\varphi(.), \psi(.))\, \psi'_y(x,y).$$

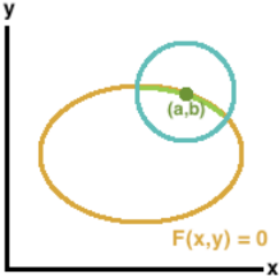
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Implicit függvény

Implicit függvény explicit alakja

Példa feladat: Adott a síkban az $F(x, y) = 0$ görbe.

A görbe egy pontja, (a, b).



A pont környezetében keressük

azt az $y = f(x)$ függvényt,

melyre

$F(x, f(x)) = 0$ és $f(a) = b$.

A görbét megadó $F(x, y) = 0$ *implicit függvény*

EXPLICIT ALAKJA $y = f(x)$.

Implicit függvény tétel

Vajon mikor létezik $F(x, f(x)) = 0$?

Tétel. Tfh $F(x_0, y_0) = 0$ és F diff-ható (x_0, y_0) egy környezetében.

Tfh $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (azaz az érintősík "ferde"). Ekkor

- $\exists I = I_1 \times I_2 = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, intervallum,
- $\forall x \in I_1$-re az $F(x, y) = 0$ egyenletnek $\exists! y = f(x)$ mo-a
- és $y \in I_2$.

Tétel. *(Implicit függvény tétel, folytatás)*

Tehát létezik egy $f : I_1 \to I_2$ függvény, melyre:

- $f(x_0) = y_0$.
- $f(x) \in I_2$, $\forall x \in I_1$.
- $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I_1$.
- $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, $\forall x \in I_1$.

Továbbá f differenciálható I_1-ben, és deriváltja:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Megjegyzések

1. Az implicit függvény tétel a görbe *lokális tulajdonság*át mondja.

2. Csak egzisztenciát állít: *létezik* a megfelelő függvény. Nincs konstrukció.

Biz. *Nincs.* Ha már tudjuk, hogy f diff-ható, akkor deriváltja:

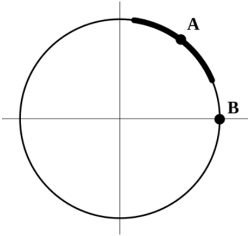
Mivel $F(x, f(x)) = 0$ MINDEN x-re. Ezért deriválva:

$$\Longrightarrow \quad F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) f'(x) = 0,$$

és innen $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Példa

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$



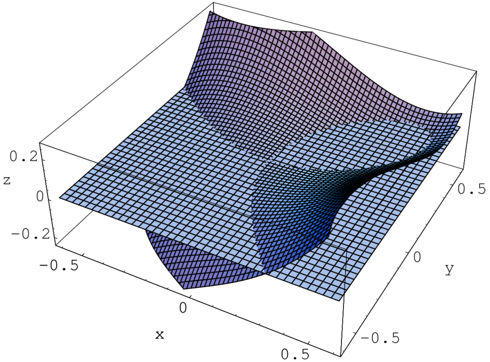
Konkrét (x_0, y_0) mellett három eset lehetséges.

A. Ha $x_0 \in (-1, 1)$ és $y_0 > 0$, akkor $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

A- Ha $x_0 \in (-1, 1)$ és $y_0 < 0$, akkor $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

B. Ha $x_0 = \pm 1$, akkor $y_0 = 0$. Ekkor $F'_y(x_0, 0) = 0$, és valóban, a megoldás nem folytatható.

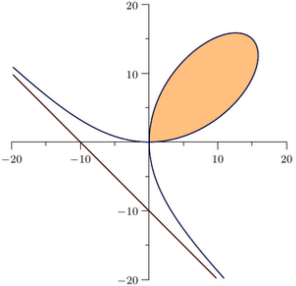
Descartes-féle görbe



Definíció. DESCARTES-FÉLE GÖRBE:

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad a > 0 \text{ egy valós paraméter.}$$

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$



$$F'_x(x,y) = 3x^2 - 3ay,$$

$$F'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax.$$

$$F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0,$$

$$\Longrightarrow \quad (0,0) \text{ körül } \nexists \text{ explicit mo.}$$

$\forall$ más pont alkalmas kiindulási pont.

Az explicit függvény deriváltja:

$$f'(x) = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{af(x) - x^2}{f^2(x) - ax}$$