

Matematikai Analízis I.

Tételjegyzék 2020.

1. (i) Természetes számok. **Teljes indukció.** Cantor féle közös-pont tétel (B). Halmaz korlátossága. Pontjainak osztályozása.
(ii) **Infimum és supremum**, kétfajta definíció. Létezés feltétele, tétel (B).
(iii) **Háromszög egyenlőtlenség, általános eset**(B). Bernoulli egyenlőtlenség. Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (B).
2. (i) Számsorozat. Korlátosság. **Határérték.** Divergens számsorozat, típusai. Fix $p > 0$ -ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = ?$
(ii) Konvergencia és korlátosság kapcsolata, mindkét irány(B). Határérték tulajdonságai.**Cauchy sorozat, konvergenciája** (B).
(iii) **Az e szám értelmezése** (B). Előállítás végtelen összegként. Nevezetes sorozat határértékek e kapcsán. Nullsorozat. Tulajdonságok.
3. (i) **Részsorozat**, példák. Monoton részsorozat létezése (B). **Bolzano-Weierstrass tétel.** (B)
(ii) Határérték monotonitása. **Rendőrelv sorozatokra.** (B) Nevezetes sorozat határértékek, pl $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$ racionális törtek.
(iii) Számtani-átlag sorozat. Ennek határértéke. (B) **Torlódási pont**, kapcsolat a határértékkal. (B) $\overline{\lim}$ és $\underline{\lim}$.
4. (i) **Végtelen sor. Konvergencia**, szükséges feltétele. (B) Divergencia teszt.
(ii) **Végtelen mértani sor, konvergencia feltétele**, sor összege (B). Koch görbe kerülete (*és területe*).
(iii) **Cauchy kritérium számsorokra** (B). Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra: majoráns és minoráns kritériumok.

5. (i) **Abszolút konvergencia sor.** Kapcsolat konvergenciával (B). **Hányadoskritérium** (B), gyengített változata.
 - (ii) **Gyökkritérium** (B), gyengített változata (B). **Feltételesen konvergencia sor.** Példák.
 - (iii) **Leibniz-sor.** Konvergenciája (B). Riemann tétel végtelen sorok átrendezéséről.
6. (i) Függvény definíció, alaptulajdonságok. Összetett függvény. **Inverz függvény létezése. Trigonometrikus függvények inverzei**
 - (ii) **Folytonosság adott pontban**, geometriai jelentés. Sorozatfolytonosság ill. folytonosság (B). **Határérték és folytonosság kapcsolata.**
 - (iii) Folytonos függvények tulajdonságai. **Bolzano tétel** (B). Következmények.
 - (iv) $[a, b]$ -n értelmezett folytonos függvények: **Weierstrass 1. és 2. tétele** (B)
7. (i) **Függvény határértéke véges pontban.** Egyoldali határértékek.
 - (ii) Szakadási helyek osztályozása. Példák. Határérték tulajdonságai: pl. monoton függvény (B). Nevezetes függvény határértékek.
 - (iii) Rendőr elv függvény határértékére (B). **Határérték-fogalom kiterjesztése**, példák. Átviteli elv határérték kiszámítására.
 - (iv) **Egyenletes folytonosság.** Példa ennek teljesülésére és nem-teljesülésére. Elégséges feltétel: Heine tétel.
8. (i) Differenciahányados és **differenciálhányados.** Geometriai és fizikai jelentés. **Folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata.** (B) Elemi függvények deriváltja (B).
 - (ii) **Differenciálási szabályok** (B). Láncszabály. Érintő egyenes egyenlete.
 - (iii) **Inverz függvény deriváltja** (B), ennek szemléletes jelentése. **Rolle középérték tétel** (B).

9. (i) Lagrange féle középérték tétel (B). Következmény: **Integrálszámítás I. alaptétele.** (B) Magasabb rendű deriváltak.
- (ii) **Trigonometrikus függvények inverzeinek deriválása.** (B) Hiperbolikus függvények, tulajdonságok, ezek deriváltjai.
- (iii) Cauchy-féle középérték tétel. **L'Hospital szabály.** (B) Általános esetei.
10. (i) Lokális és globális szélsőértékek. Lokális szélsőérték létezésének **szükséges feltétele.** (B) Monoton differenciálható függvények jellemzése (B)
- (ii) **Konvex és konkáv függvények.** Ezek jellemzése differenciálható függvények esetén. Inflexió. Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele. (B)
- (iii) **Taylor polinom, tulajdonságai** (B). Lagrange-féle maradéktag.
11. (i) **Primitív függvény.** Határozatlan integrál alaptulajdonságai (B).
- (ii) **Riemann-integrál, szemléletes jelentés.** Integrál közelítő összegek, ezek alaptulajdonságai (B). **Riemann integrál definíció.** Nem integrálható függvényre példa.
- (iii) Riemann integrál alaptulajdonságai. Oszcillációs összeg. **Integrálhatóság 3 elégséges feltétele.** (*egyikre* (B))
- (iv) Integrálközép. Integrál középérték tétel. (B) **Newton-Leibniz tétel.** (B)
12. (i) Integrálfüggvény. **Integrálszámítás II. alaptétele.** (B)
- (ii) **Parciális integrálás.** Alapesetek. (B)
- (iii) **Helyettesítés integrálban, határozott alak.** Integrálszámítás alkalmazásai: Jordan görbe ívhossza (B), forgástest térfogata.
13. (i) Lokálisan integrálható függvény. **Improprius integrál.** Alaptulajdonságok. Majoráns és minoráns kritérium improprius integrál létezésére.
- (ii) **Hatványfüggvény improprius integrálja $(0, 1)$ -ben** (B). Elégséges feltétel integrálhatóságra nem korlátos függvény esetén.

- (iii) **Hatványfüggvény improprius integrálja** $(1, \infty)$ -ben. (B) Elégséges feltétel improprius integrálhatóságra az $[1, \infty)$ intervallumon a hatványfüggvényhez kapcsolódóan.
14. (i) Differenciálegyenlet értelmezése, megoldása. **Cauchy-feladat.** Általános és partikuláris megoldás. Növekedési folyamat.
- (ii) **Szeparábilis DE. Megoldása.** (B) Robbanás egyenlete, látszólagos ellentmondás feloldása. (B)
- (iii) Homogén lineáris DE megoldások struktúrája. (B) **Homogén LDE általános megoldása.**
- (iv) Inhomogén LDE: megoldások struktúrája. **Állandók variálása** (B). Inhomogén LDE általános megoldása.
15. (i) Függvénysorozatok. **Pontenkénti és egyenletes konvergencia.** Cauchy kritérium. Elégséges feltétel egyenletes konvergenciára. (B).
- (ii) Függvénysor. Összegfüggvény tulajdonságai: **folytonosság** (B), **derivált** és **integrál.**
- (iii) **Taylor sor.** Taylor sor és az eredeti függvény kapcsolata. Konvergencia elégséges feltétele. (B). Alapfüggvények: e^x (B), $\sin(x)$ (B), $\cos(x)$ (B).