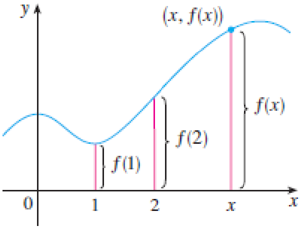
Függvények. 2. rész

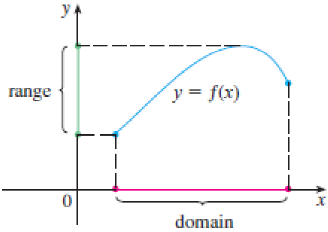
2020. október 5.

Valós függvények

A függvény $f : X \to Y$ egyértelmű hozzárendelés.

Feltesszük, hogy $X \subset \mathbb{R}$ és $Y \subset \mathbb{R}$.





Periodicitás

Definíció. Az f függvény PERIODIKUS p periódussal,ha $\forall x,\ x+p \in D_f$ esetén

$$f(x+p) = f(x).$$

Megjegyzés. Ha egy függvény periodikus p periódussal, akkor p tetszőleges *egész számú többszöröse* is periódusa lesz.

Példa. $f(x) = \sin(x)$ periodusa?

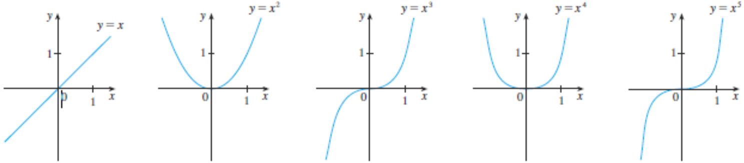
Polinomok

Definíció. Egy valós együtthatós POLINOM általános alakja:

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Ezekre a polinomokra $D_f = \mathbb{R}$. A polinom FOKA n

- $n = 1$ esetén $p_1(x) = ax + b$ LINEÁRIS függvény,
- $n = 2$ esetén $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ KVADRATIKUS függvény.



Definíció. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY két polinom hányadosa:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Ha a nevező zérushelyei: H, akkor $D_f = \mathbb{R} \setminus H$.

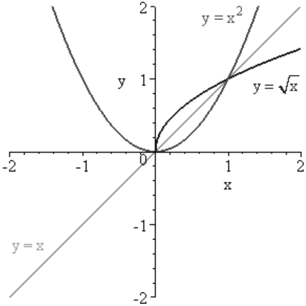
ALGEBRAI FÜGGVÉNYEK a racionális törtfüggvények **inverzei**.

Példa. $f(x) = x^n$, $x \geq 0$

Ennek inverze:

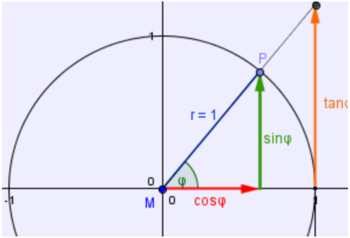
$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$D_{f^{-1}} = \{x : x \geq 0\}.$$

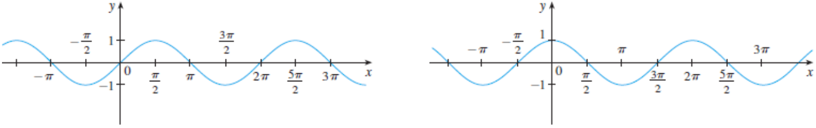


Trigonometrikus függvények

Első definíció ez volt:



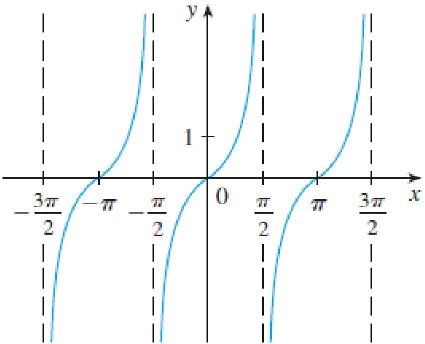
A kiterjesztés:



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $g(x) = \cos x$

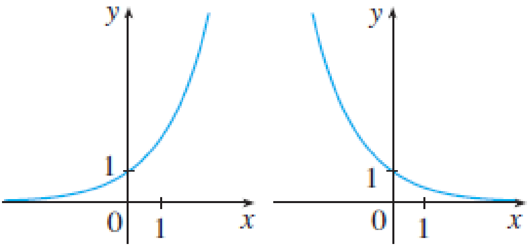
A szögeket *radiánban* mérjük, nem fokban.

Tangens



Exponenciális függvény

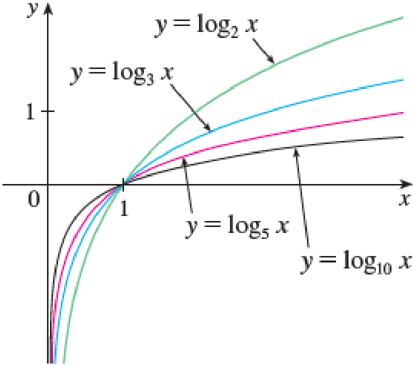
$f(x) = a^x$, $a > 0$. Két különböző eset: $a > 1$ vagy $a < 1$.



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

Logaritmus függvény

$f(x) = \log_a(x)$, $a > 1$. Az $y = a^x$ exponenciális fv inverze.



A folytonosság értelmezése

<u>Heurisztikusan</u> egy függvény x_0 **pontban folytonos**:

$\rightarrow$ ha x_0-ban *picit változtatunk*

$\rightarrow$ akkor a függvényérték is *picit változik*, (nincs *ugrás* a gráfban)

.

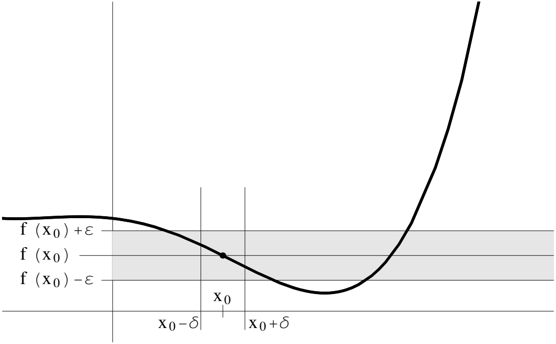
Definíció. $f : X \to Y$ valós függvény és $x_0 \in D_f$.

f AZ x_0-BAN FOLYTONOS, ha $\forall \varepsilon > 0$ hoz $\exists \delta > 0$, melyre

$$\forall x \in D_f, \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A folytonosság. Szemléletesen

$f(x_0) = y_0$.



$\varepsilon > 0$ tetszőleges.

- y_0 körül veszünk egy $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ vízszintes sávot.
- Ekkor $\exists\delta$, legyen az x_0 körüli függőleges sáv $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

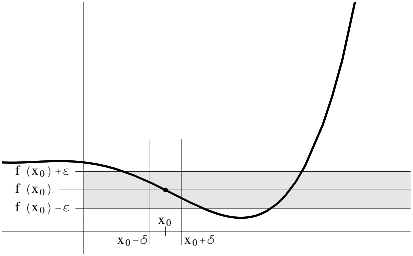
$\longrightarrow$ f gráfja a *sávok metszetébe* esik.

A folytonosság, átfogalmazás.

Definíció. Az f függvény FOLYTONOS AZ $x_0 \in D_f$ PONTBAN,

ha $f(x_0)$ $\forall U$ környezetéhez $\exists V$ környezete x_0-nak, melyre

$$\forall x \in V, \quad x \in D_f \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in U$$



1. *Példa.* $f(x) = 5x + 3$ egy lineáris függvényés $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ekkor

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 3) - (5x_0 + 3)| = |5(x - x_0)|.$$

Adott $\varepsilon > 0$.

Kérdés: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ mikor teljesül?

Válasz: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ választással,

$$|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \implies |f(x) - f(x_0)| < 5\,\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

2. *Példa.* Állítás. $f(x) = \sin(x)$ folytonos $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ pontban.

Egyrészt $|\sin x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$..

Másrészt egy trigonometrikus azonosság:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Legyen x_0 tetszőleges.Ekkor

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \leq$$

$$2 \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq \left|2\, \frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

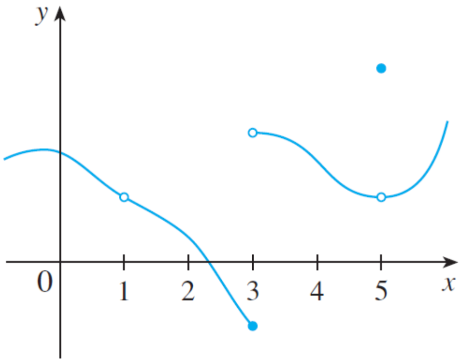
Így $\forall \varepsilon > 0$ esetén jó választás $\delta = \varepsilon$. Hiszen

$$|x - x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \qquad \surd.$$

3. *Példa.* A korábban látott elemi függvények folytonosak D minden pontjában

Szakadás

Definíció. Ha f nem folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, akkor ott SZAKADÁSA van.

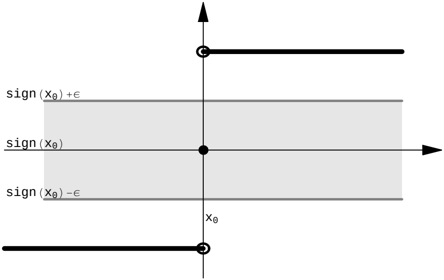


Példa.

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x > 0 \\ -1 & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}.$$

f-nek a 0-ban

szakadása van, ui...



$f(0) = 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Ekkor $\nexists(-\delta, \delta)$ intervallum, ahol

$$-\delta < x < \delta \implies -\frac{1}{2} < f(x) < +\frac{1}{2}.$$

Sorozatfolytonosság

Definíció. Az f függvény SOROZATFOLYTONOS $x_0 \in D_f$ pontban,

ha $\forall (x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

teljesül az a tulajdonság, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Folytonosság és sorozatfolytonosság

Tétel. f folytonos x_0-ban $\Longleftrightarrow$ sorozatfolytonos.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ Tegyük fel, hogy f az x_0-ban folytonos.

$x_n \to x_0$ tetszőleges sorozat. Belátjuk, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$.

$\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\exists \delta > 0$, melyre

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A *sorozat konvergenciája miatt* ehhez a δ-hoz $\exists N$ küszöbindex:

$$|x_n - x_0| < \delta, \qquad \forall n > N.$$

Így ezekre az indexekre $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ teljesül.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0, \text{ melyre } |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ Tfh. f az x_0-ban sorozatfolytonos.

Indirekt módon tegyük fel, hogy f *mégsem* folytonos x_0-ban:

$\longrightarrow$ $\exists\varepsilon > 0$, melyre "$\forall\delta$ rossz", azaz

$\forall\delta > 0$-hoz $\exists x \in D_f$: $|x - x_0| < \delta$,mégis $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $\delta = \dfrac{1}{n}$-hez is $\exists x_n$, melyre

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Tekintsük ezt az (x_n) sorozatot: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

Mivel $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, $\forall n$-re, $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Így az *indirekt feltevésünk nem helyes*, tehát f az x_0-ban folytonos.

Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \quad \text{racionális} \\ -1, & \text{ha} \quad x \quad \text{irracionális} \end{cases}.$$

Ez a függvény NEM folytonos.

Valóban, ha x_0 *racionális*, akkor $x_n := x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$.

Erre a sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, f(x_n) \equiv -1$.

Másrészt $f(x_0) = 1$, így nem teljesül a sorozatfolytonosság.

Ha x_0 *irracionális*, akkor x_n : x_0 végtelen tizedestört felírásában

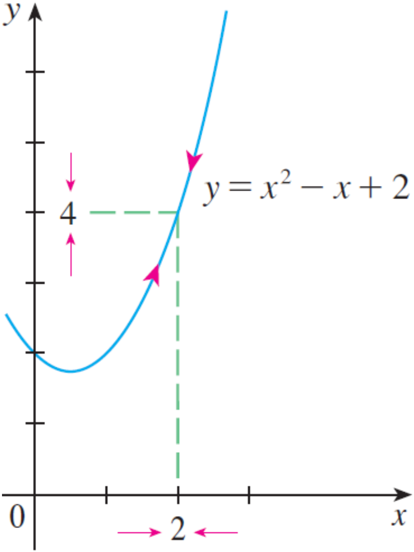
az *első n tagot tartalmazó szám.* Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(x_0) = -1,$$

a függvény itt sem folytonos.

Határérték

Heurisztikusan...



Határérték

Definíció. Az f függvény HATÁRÉRTÉKE x_0-BAN α, ha

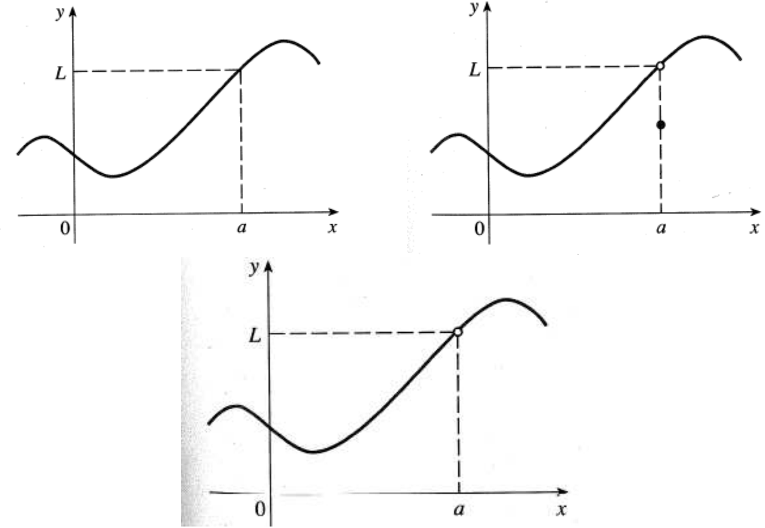
$\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, melyre

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ és } \ x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha.$

FIGYELEM: A határérték definíciójában $f(x_0)$ nem játszik szerepet. Sőt...

Határérték definíció, szemléletesen



Pontos feltétel

Adott $f : D \to \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$.

Feltesszük, hogy $\exists U = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezet, melyre

$$(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \subset D.$$

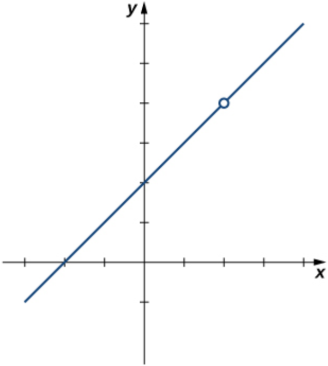
Esetleg $x_0 \notin D_f$ is előfordulhat.

Következmény. $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$ belső pont. Ekkor

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Példa

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$



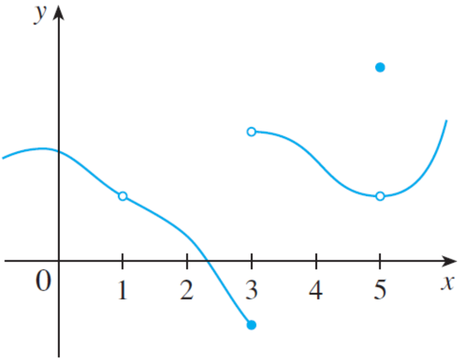
Itt

$x_0 = 2 \notin D_f$. Vajon $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = ?$

$x \neq 2$ esetén $f(x) = x + 2$. Ezért

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Egyoldali határértékek



Jobboldali határérték

Definíció. Az f JOBBOLDALI HATÁRÉRTÉKE x_0-BAN $\alpha \in \mathbb{R}$

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre

$$x \in D_f, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\mathbf{x \to x_0+}} f(x) = \alpha.$$

A jobboldali határérték, rövid jelölés:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Baloldali határérték

Az textsc$f$ baloldali határértéke x_0-ban $\alpha \in \mathbb{R}$

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre

$$x \in D_f, \qquad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}-} f(x) = \alpha.$$

A baloldali határérték, rövid jelölés:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Egyoldali és kétoldali határértékek

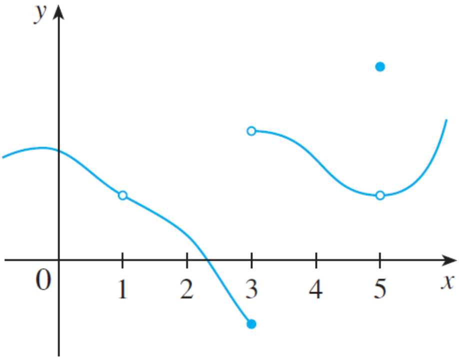
Állítás.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \alpha \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \alpha$$

Egyoldali határértékek



Szakadási helyek osztályozása

ELSŐFAJÚ SZAKADÁS, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0) < \infty$$

$$\exists \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0) < \infty$$

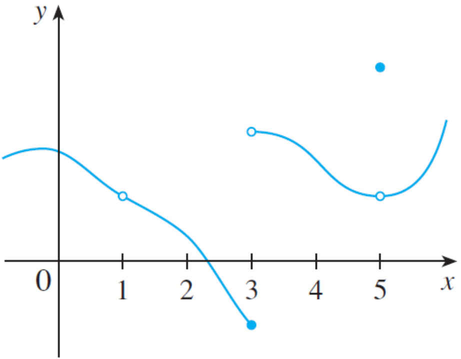
Speciális elsőfajú szakadás: MEGSZÜNTETHETŐ a szakadás, ha

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, azaz $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, de

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Elsőfajú szakadás

Példa megszüntethető és nem megszüntethető szakadásra



Másodfajú szakadás

Definíció. MÁSODFAJÚ a szakadás, ha nem elsőfajú.