Számsorok 3. rész
Függvények.

2020. szeptember 30.

Példa. Koch görbe

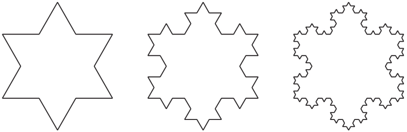
Képezzünk sokszöget egy szabályos, a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. lépés Osszunk minden oldalt 3 egyenlő részre.

2. lépés Minden középső részre illesszünk szabályos $\triangle$-t.

Ezután ismételjük meg az ezeket a lépéseket.

Az 1. és 2. és 3. iteráció eredménye:



A végtelen iteráció "végén" így kapott sokszög a *Koch-görbe*.

Mennyi ennek az alakzatnak a kerülete és területe?

Koch görbe kerülete

A Koch-görbe kerületét egy sorozat határértékeként kapjuk.

K_n jelölje n iteráció után kapott alakzat kerületét. $K_0 = 3a$.

Egy iterációban minden oldal hossza $\frac{4}{3}$ -szorosára nő.

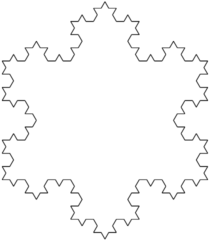
$$\implies \quad K_n = \frac{4}{3} K_{n-1} = 3a \left(\frac{4}{3} \right)^n.$$ A kerület tehát:

$$K_\infty = 3a \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty$$

Koch görbe területe

$\longrightarrow$ Geometriai sor határértéke.

$\forall$ lépésben az újonnan illesztett háromszögek



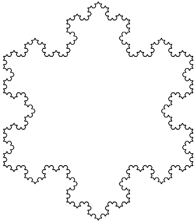
- száma az előző oldalszámmal egyenlő (azaz 4-szeresére nő)
- *területe* az előző háromszögek területének $\frac{1}{9}$-szerese.

A terület határértékére felírható geometriai sor:

$$T_\infty = T + 3 \cdot \frac{T}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{T}{9 \cdot 9} + 3 \cdot 16 \cdot \frac{T}{9 \cdot 81} + \cdots =$$

$$= T + \lim_{n \to \infty} 3 \cdot \frac{T}{9} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \cdots = \frac{8T}{5}.$$

Koch görbe, fraktál



Megjegyzés. A kapott alakzat *véges területét* önmaga *kicsinyített másaiból* előálló *végtelen hosszú* görbe határolja.

A Koch-görbe tipikus példája az **önhasonló fraktál**oknak.

Leibniz - típusú sorok

Definíció. $\left(\sum a_n\right)$ LEIBNIZ - TÍPUSÚ SOR, ha (a_n):

1. Váltakozó előjelű, azaz $a_n a_{n+1} \leq 0$,

2. $(|a_n|)$ monoton fogyó,

3. (a_n) nullsorozat.

Tétel. Minden Leibniz -típusú $\left(\sum a_n\right)$ sor konvergens.

Más jelöléssel, legyen

$$b_n = |a_n|$$

A Leibniz sor

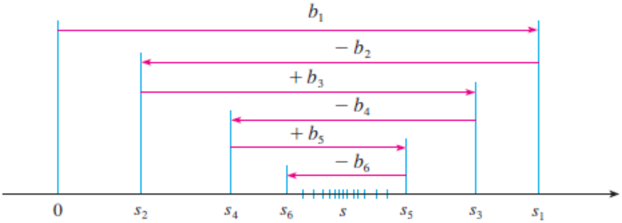
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \ldots, \qquad b_n > 0,$$

ahol

1. tulajdonság: $b_{n+1} \leq b_n$

2. tulajdonság: $\lim b_n = 0$.

"Bizonyítás"



Bizonyítás. Feltehető, hogy $a_1 > 0$. Ekkor $a_{2n+1} > 0$, és $a_{2n} < 0$.

Képezzük az alábbi sorozatokat:

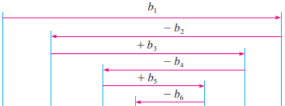
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 := a_1 + a_2 \\ \beta_1 := a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 \le \beta_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ \beta_2 := a_1 + a_2 + a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 \le \beta_2$$

$$\vdots$$

Az (a_n) sorozat abszolútérték-monotonitása miatt

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots \qquad \beta_1 > \beta_2 > \dots$$



Az $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$, $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$, ... intervallumsorozatra:

1. $I_{n+1} \subset I_n$, egymásba skatulyázottak,
2. zárt intervallumok,
3. az intervallumok hossza: $|I_1| = |a_2|$, $|I_2| = |a_4| \quad \dots$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0.$$

A Cantor-féle közöspon tétel feltételei teljesülnek,

ezért $\exists! s$ közös pont:

$$s = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Leibniz sor, maradék tag becslés

Legyen a sor összege s, és jelölje

$$R_n = s - s_n.$$

Ekkor

$$\mathrm{sign}(R_n) = \mathrm{sign}(a_{n+1}),$$

$$|R_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Példa

Tekintsük az alábbi végtelen sort:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, \qquad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Látható, hogy

1. $|a_{n+1}| < |a_n|$, hiszen $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Tehát a fenti sor Leibniz-típusú.

Ezért konvergens, létezik a részletösszegek határértéke:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots < \infty$$

Hibabecslés

Állítás. A sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln(2).$$

Adjunk **becslést** a hibára:

$$\sum_{n=1}^{100}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} - \ln(2) = ? \qquad \textit{HF}$$

Példa folytatás

Egyrészt azt igazoltuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} < \infty.$$

Másrészt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty,$$

ahogy korábban már beláttuk.

Tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

sor *feltételesen konvergens*.

Példa

Vajon konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}?$$

Válasz?

$$a_n = \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}.$$

$\longrightarrow$ Alternáló $\surd$

DE!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1} = ?$$

A sor összege

Tétel. RIEMANN TÉTEL.

1. Abszolút konvergens sor esetén a sor *összege független* az összeadandók sorrendjétől.

   Feltételesen konvergens soroknál ez nincs így!

2. Feltételesen konvergens sor esetén a sor átrendezésével **az összeg bármi** lehet.

Paradoxon?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdots = c > 0$$

A sort átrendezzük:

$$c = \left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)\ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots\right) = \frac{c}{2}. \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{c}{2}!?$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ **feltételesen konvergens**, így az összeg függ az *összeadás sorrendjétől*.

A sor összge **bármi** is lehet. $\Rrightarrow$ "PARADOXON" megoldása

Néhány további nevezetes sor összege

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(Ez a Leibniz formula π előállítására.)

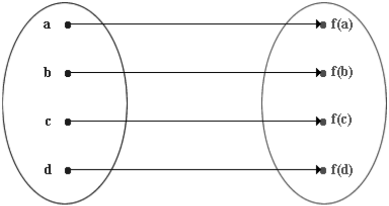
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \ln 2$$

FÜGGVÉNYEK

X és Y két halmaz. A FÜGGVÉNY egy $f : X \longrightarrow Y$ leképezés.

$\forall x \in X$ elemhez hozzárendelünk egy $y \in Y$ elemet. Így jelöljük:

$$y = f(x), \qquad x \mapsto y$$



A függény ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYA D_f.

A függvény ÉRTÉKKÉSZLETE $R_f = \{y \in Y : \exists x \in X, \quad y = f(x)\}$.

Definíció. Speciális esetként legyen $X = Y$, és a függvény $f(x) := x$. Ez az IDENTITÁS függvény.

Definíció. Az f függvény INJEKTÍV, ha

$$\forall x_1 \neq x_2 \in D_f : \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

A függvény SZÜRJEKTÍV, ha $\forall y \in Y$- hoz $\exists x$, melyre $y = f(x)$.

A függvény BIJEKTÍV, ha injektív és szürjektív,

$\longrightarrow$ a hozzárendelés *kölcsönösen egyértelmű* X és Y között.

Definíció. Adott két függvény, $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$.

Az ÖSSZETETT FÜGGVÉNY $g \circ f : X \to Z$, melyre $x \mapsto g(f(x))$.

g a KÜLSŐ-, f a BELSŐ FÜGGVÉNY.

Értelmezési tartománya $D_{g \circ f} = \{x : \ x \in X, \ f(x) \in D_g\}$.

Példa. A két függvény $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sin(x)$.

Ekkor $f \circ g$ és $g \circ f$ is értelmezhető:

$$f \circ g(x) = \sin^2(x), \qquad g \circ f(x) = \sin\left(x^2\right).$$

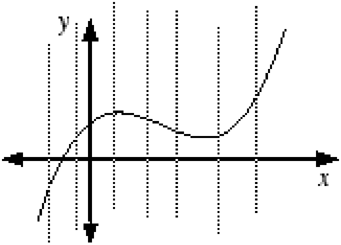
Valós függvények

A fenti definíciók tetszőleges X és Y esetén értelmezhetőek.

A továbbiakban csak **valós függvényekkel** foglalkozunk.

Feltesszük, hogy

$$X \subset \mathbb{R}, \qquad Y \subset \mathbb{R}.$$



Függőleges vonal tesz

Ha a függvény bijektív, akkor létezik **inverz függvény**

$$f^{-1} : Y \to X,$$

melyre

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

Tehát

$$f \circ f^{-1} : Y \to Y, \qquad f^{-1} \circ f : X \to X$$

identitás függvények az adott halmazokon.

FIGYELEM! A függvények esetén az $\mathbf{f^{-1}}$ jelölés **NEM jelent reciprokot**! Egészen mást jelent, mint az $\mathbf{\frac{1}{f}}$ függvény.

Valós függvények esetén szemléletesen az inverzfüggvény gráfját úgy kapjuk, hogy az x és y tengelyek felcserélődnek.

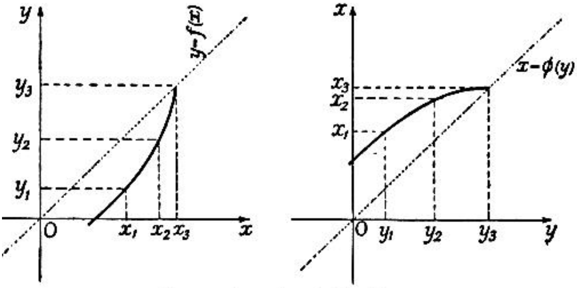


Fig. 10.—Inversion of a function

Egy függvény akkor invertálható, ha bármely x tengellyel párhuzamos egyenes *legfeljebb csak egy pontban* metszi a gráfot.

Vízszintes vonal tesz

Korlátosság

Definíció.

Az f függvény **alulról korlátos**, ha R_f alulról korlátos.

Az f függvény **felülről korlátos**, ha R_f felülről korlátos.

Végül az f függvény **korlátos,** ha R_f korlátos.

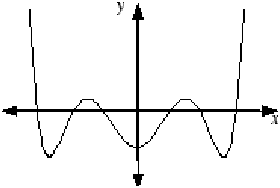
Másképp fogalmazva, az f függvény korlátos, ha $\exists K$ szám, hogy

$$|f(x)| \leq K \qquad \forall x \in D_f.$$

Definíció. Az f függvény **páros**, ha D_f szimmetrikus

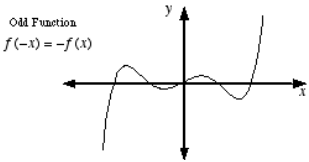
(azaz $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül) és

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f.$$



Az f függvény **páratlan**, ha D_f szimmetrikus és

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in D_f.$$



Példa.

- Az $f(x) = x^2$ függvény páros,
- a $g(x) = x^5$ függvény páratlan.

Monotonítás

Definíció. Az f függvény MONOTON NÖVŐ, ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

f SZIGORÚAN MONOTON NÖVŐ, ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

f MONOTON FOGYÓ, (SZIGORÚAN MONOTON FOGYÓ) ha

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

(ill. $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$.)