Számsorok 2. rész

2020. szeptember 28.

VÉGTELEN SOR egy végtelen összeg: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

A $(\sum a_n)$ **sor**hoz hozzárendelünk két **sorozatot**

– az (s_n) sorozat a részlet-összegek sorozata

– az (a_n) sorozat az összeadandók sorozata.

Ha a $(\sum a_n)$ **sor** konvergens és a *sor összege* s, akkor

– az (s_n) sorozat határértéke s

– az (a_n) sorozat határértéke 0.

$(\sum a_n)$ sor konvergens $\iff$ az (s_n) Cauchy sorozat.

Cauchy kritérium sorokra

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre $\forall n > m \geq N$ esetén

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

4. Példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

Elemi törtekre bontva :
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = 1. \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Majoráns és minoráns kritériumok

Tétel. Adottak $(\sum a_n)$ és $(\sum b_n)$ számsorok.

1. (Majoráns kritérium) Tfh. $0 \leq b_n \leq a_n$, $\forall n$.

   Ha $(\sum a_n)$ sor konvergens $\Longrightarrow$ $(\sum b_n)$ is konvergens.

2. (Minoráns kritérium) Tegyük fel, hogy $b_n \geq a_n$, $\forall n$.

   Ha $(\sum a_n)$ divergens és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, akkor

   $(\sum b_n)$ is divergens, és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$.

Bizonyítás. A sorozatokra igazolt összehasonlító kritériumok $\surd$

Példa.

Vajon a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens-e?

Felhasználjuk azt a becslést, hogy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \qquad n \geq 2.$$

Ekkor alkalmazhatjuk a majoráns kritériumot, hiszen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 < \infty,$$

a majoráns sor konvergens.

Tehát ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Összegezve

Eddig ezt láttuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Megjegyzés. A későbbiek során be fogjuk látni, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor konvergens, $\iff$ ha $\alpha > 1$.

Példa. Végtelen tizedestört

Egy végtelen tizedestört a $(0, 1)$ intervallumban:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \qquad 0 \leq a_k \leq 9.$$

A fenti sort majorálni tudjuk egy *mértani sorral*

$$a_k \leq 9 \implies \text{majoráns sor:} \quad 9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} < \infty$$

tehát $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ konvergens.

Definíció. A $(\sum a_n)$ végtelen sor ABSZOLÚT KONVERGENS,

ha $(\sum |a_n|)$ sor konvergens:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |a_k| < \infty.$$

Állítás. Ha $(\sum a_n)$ *abszolút konvergens*, akkor konvergens is.

Bizonyítás. Belátjuk a Cauchy kritérium teljesülését.

$\varepsilon > 0$ tetszőleges. $(\sum |a_n|)$ konvergens, ezért $\exists N$:

$$\forall n > m > N : \qquad \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

A háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\forall n > m > N : \qquad |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Definíció. A $(\sum a_n)$ végtelen sor FELTÉTELESEN KONVERGENS, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Ki tud ilyent?

$$\text{abszolút konvergencia} \Rrightarrow \text{konvergencia}$$

$$\text{konvergencia} \not\Rrightarrow \text{abszolút konvergencia}$$

Pozitív tagú sorok

Definíció. A $(\sum a_n)$ végtelen sor POZITÍV TAGÚ SOR, ha

$$a_n \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor két eset lehet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

másfajta divergencia nincs.

Következmény. Pozitív tagú sorok esetén

abszolút konvergens $\iff$ konvergens

Hányadoskritérium

Tétel. Adott $(\sum a_n)$ sor.

1. Tegyük fel, hogy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ahol $0 < q < 1$.

Akkor a sor abszolút konvergens. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

2. Tegyük fel, hogy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor a $(\sum a_n)$ sor divergens.

Bizonyítás. 1. A feltétel szerint

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_2}{a_1}\right| &\leq q \\ \left|\frac{a_3}{a_2}\right| &\leq q \\ &\vdots \\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &\leq q \end{aligned}$$

Ezeket összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| \leq q^n, \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}| \leq |a_1| q^n.$$

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_1| q^n$ *mértani sor* majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sort.

$\Longrightarrow$ Ez utóbbi sor is konvergens.

2. Tegyük fel, hogy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1.$$

Akkor $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, tehát (a_n) nem lehet nullsorozat.

Akkor a sor divergens. Mire hivatkozhatunk?

Megjegyzés. Elegendő a fenti tételben, hogy a feltételek $\forall n \geq N$ esetén teljesülnek, valamely fix N mellett.

Elnevezés: *D'Alembert féle hányadoskritérium.*

Megjegyzés. 1.-ben fontos a **határozottan 1-nél kisebb** q szám létezése. Nem lenne elegendő, hogy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad \forall n.$$

Egy példán mutatom be. Legyen $a_n = \frac{1}{n}$.

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. A sor divergens.

Mégis, a hányadosra mindig teljesül, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

de nincs közös $q < 1$ felső korlát.

Hányadoskritérium gyengített változata

Tétel.

Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$$

határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a sor **abszolút konvergens**,
2. ha $A > 1$, akkor a sor **divergens**,
3. ha $A = 1$, akkor a sor **lehet konvergens és divergens** is.

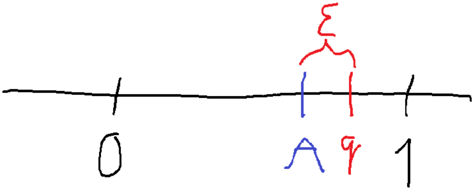
Bizonyítás. Visszavezetjük az előző tételre.

1. Tfh. $A < 1$. Ekkor $\varepsilon = \dfrac{1-A}{2}$-hoz $\exists N$ index, melyre:

$$\left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - A \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N.$$

Speciálisan:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < A + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad q := A + \varepsilon = A + \frac{1-A}{2} < 1.$$



2. Tegyük fel, hogy $A > 1$. Ekkor van olyan N, melyre

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{ha } n \geq N$$

Ekkor (a_n) nem nullsorozat. Tehát a sor nem konvergens.

3. Tegyük fel, hogy $A = 1$. Mindkét esetre mutatok példát.

Legyen $a_n = \dfrac{1}{n}$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A = 1. \qquad \text{És} \quad \sum_{n\to 1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Legyen $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A = 1 \qquad \text{És} \quad \sum_{n\to 1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Példa

Legyen $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

sort. Vajon konvergens-e? Lehet-e?

Alkalmazzuk a hányados kritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{3^n}{n!} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Tehát a sor konvergens.

Példa. Legyen

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Ekkor a végtelen sor

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

A hányados kritérium szerint

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} < 1,$$

így a sor konvergens.

Be fogjuk látni, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. (Eddig: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.)

Gyökkritérium

Tétel. Adott $(\sum a_n)$ sor.

1. Tegyük fel, hogy

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

   ahol q rögzített és $0 < q < 1$.

   Akkor a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

2. Tegyük fel, hogy

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Ekkor a $(\sum a_n)$ sor divergens.

Bizonyítás. 1. A feltétel szerint $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, ahol $0 < q < 1$.

Emiatt

$$|a_n| \leq q^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $|q| < 1$, a mértani sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty,$$

ezért a majoráns kritériumot alkalmazhatjuk.

Tehát valóban:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

2. Ha $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, akkor $|a_n| \geq 1$, ezért (a_n) nem nullsorozat.

A *Divergencia teszt* miatt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nem konvergens.

Elnevezés: *Cauchy féle gyökkritérium.*

Gyökkritérium gyengített változata

Tétel.

Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$$

határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a $(\sum a_n)$ sor **abszolút konvergens**,
2. ha $A > 1$, akkor a $(\sum a_n)$ sor **divergens**,
3. ha $A = 1$, akkor a akkor a kritérium alapján nem eldönthető a sor konvergenciája.

Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sort. Vajon konvergens-e?

Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \surd$$

Tehát a sor konvergens.

Megjegyzés. A sor összegét nem tudjuk, csak a konvergenciát igazoltuk.

Vajon $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ konvergens-e?

Példa. Koch görbe

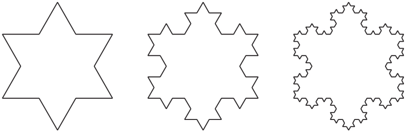
Képezzünk sokszöget egy szabályos, a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. lépés Osszunk minden oldalt 3 egyenlő részre.

2. lépés Minden középső részre illesszünk szabályos $\triangle$-t.

Ezután ismételjük meg az ezeket a lépéseket.

A 2. és 3. és 4. iteráció eredménye:



A végtelen iteráció "végén" így kapott sokszög a *Koch-görbe*.

Mennyi ennek az alakzatnak a kerülete és területe?

Koch görbe kerülete

A Koch-görbe kerületét egy sorozat határértékeként kapjuk.

Minden lépésben minden oldal hossza $\frac{4}{3}$ -szorosára nő, hiszen minden oldal középső harmadát nála kétszer hosszabbra cseréltük.

A kerület tehát:

$$K_\infty = 3a \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty$$