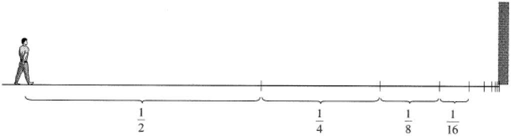
Számsorok

2020. szeptember 23.

Számsorok

Zeno-paradoxon



Elér-e a sétáló a falig?

- elmegy a táv feléig

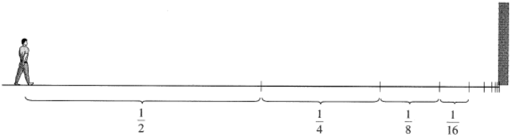
- elmegy a maradék táv feléig

- elmegy a maradék táv feléig

- ...

"Nincs vége, hisz mindig megmarad a táv fele - végtelenségig lehet folytatni"

Zeno-paradoxon



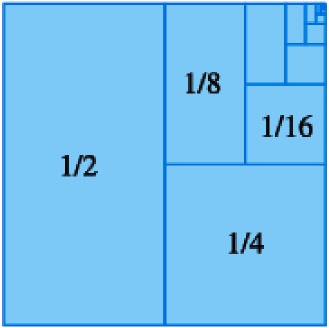
Elér-e a sétáló a falig?

– TUDJUK, hogy eléri a falat.

$\Rrightarrow$ **végtelen** sok szám összege lehet **véges.**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} = \mathbf{0.5} \\
s_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \mathbf{0.75} \\
s_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \mathbf{0.875} \\
s_4 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \mathbf{0.9375} \\
&\vdots \\
s_7 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256} = \mathbf{0.9921875} \\
&\vdots
\end{aligned}$$



$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Látható, hogy $s_n \to 1$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Bevezető

Emlékeztető: **sorozat** valós számok rendezett halmaza.

Sor valós számok összege, ahol az összeadandók száma végtelen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ldots .$$

Definíció. $\textsc{Végtelen sor (számsor)}$ egy végtelen összeg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Mi az értelme?

Végtelen sor konvergenciája

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$$

Definíció. A fenti végtelen sor n-dik RÉSZLETÖSSZEGE

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A VÉGTELEN SOR KONVERGENS, ha (s_n) konvergens.

Ekkor a A SOR ÖSSZEGE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Jelölés: $\left(\sum a_n \right)$.

1. Példa

Legyen $a_n = \frac{1}{2^n}$, a végtelen sor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Ekkor

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \ldots \textit{teljes indukció } \ldots = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Tehát $s_n \to 1$ konvergens, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2. Példa

Legyen $a_n = (-1)^n$, ekkor a végtelen sor

$$-1+1-1+1-1+1-1+\dots . \qquad \text{Mennyi az összege?}$$

A részletösszegek sorozata:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n = 2k \\ -1 & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Az (s_n) sorozat nem konvergens $\Longrightarrow$ a végtelen sor **összege nem létezik.**

Definíció. Ha a részletösszegek (s_n) sorozata nem konvergens, akkor a VÉGTELEN SOR DIVERGENS.

Geometriai - mértani - sor.

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Az eddigi jelölésekkel

$$a_n = q^{n-1}.$$

Az első n tag összege

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$

1. eset. $q = 1$. Ekkor

$$s_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n \to \infty.$$

Mivel (s_n) nem konvergens, így **a geometriai sor divergens** ebben az esetben.

2. eset. $q \neq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \quad q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \\ q s_n &= \qquad\; q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \quad + q^n. \end{aligned}$$

Kivonva a két egyenletet egymásból:

$$s_n - q s_n = 1 - q^n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

$$\text{Így} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{ha} \quad |q| < 1 \\ \nexists & \text{ha} \quad q \leq -1 \\ ? & \text{ha} \quad q > 1 \end{cases}.$$

Példa. $q = \frac{1}{2}$. Ekkor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Nem =1 volt?

Állítás. Ha $(\sum a_n)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.

Bizonyítás. Ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S,$$

és akkor

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Divergencia teszt. Ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

akkor a sor divergens.

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz.

Ha (a_n) nullsorozat, akkor $\left(\sum a_n\right)$ *nem feltétlenül konvergens.*

Példa. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

végtelen sort.

A sor elemei 0-hoz tartanak.

A részletösszegek sorozata

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Erről már beláttuk, hogy nem konvergens.

Megjegyzés. A $(\sum a_n)$ **sor**hoz hozzárendelünk két **sorozatot**

– az (s_n) sorozat a részlet-összegek sorozata

– az (a_n) sorozat az összeadandók sorozata.

Ha a $(\sum a_n)$ sor konvergens és a *sor összege* s, akkor

– az (s_n) sorozat határértéke s

– az (a_n) sorozat határértéke 0.

Cauchy kritérium sorokra

A végtelen sor konvergens $\iff$ (s_n) Cauchy sorozat.

A $(\sum a_n)$ végtelen sor TELJESÍTI A CAUCHY FELTÉTELT,

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre $\forall n > m \geq N$ esetén

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |a_{m+1} + \ldots + a_n| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon.$$

$\Longrightarrow$ az N küszöbindex után akárhány elem összege kisebb mint ε. Miért?

Paradoxon?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = c$$

Egyelőre nem tudjuk mennyi c. Véges. Tény, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \cdots = c > 0$$

A sort átrendezzük:

$$c = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) = \frac{c}{2}. \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{c}{2}!?$$