Számsorozatok 4.

2020. szeptember 21.

Mennyi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = X$?

1. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad X = AB \surd$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és (b_n) *korlátos* $\quad \Longrightarrow \quad X = 0 \surd$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $b_n > k > 0, \ \forall n \quad \Longrightarrow \quad X = +\infty \surd$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \Longrightarrow \quad X = ???$

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = {}$"$\infty \cdot 0$" típusú határérték "bármi" lehet. *($-\infty$ is?)*

1. *Példa.* $a_n = np^n$.

Tfh. $0 < p < 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} np^n = ?$.

Átírjuk ilyen alakba: $a_n = np^n = (\sqrt[n]{n}p)^n$.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, ezért $\exists N$

$$\sqrt[n]{n} < \frac{1}{p} \qquad \forall n \geq N, \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{n}p < \frac{1}{p}p(=1)$$

Tehát létezik $0 < q < 1$, melyre

$$\sqrt[n]{n}p < q < 1.$$

Ezért $0 < a_n < q^n$, ha $n \geq N$, így a rendőrelv alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1*. *Példa.* Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges és $a_n = n^k p^n$. $0 < p < 1$.

Mit várunk?

Ekkor is $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. $a_n = n^k p^n = (\sqrt[n]{n^k}\, p)^n$.

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1.$$

Ezért $\sqrt[n]{n^k} < \dfrac{1}{p}$, ha $n > N$. $\quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{n^k}\, p < q < 1$.

Most is $0 < a_n < q^n$, ha $n \geq N$, $\quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$p \geq 1$ esetén mit mondhatunk?

2. *Példa.*

$$a_n = 3^n \cdot \frac{1}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

Legyen $n > 3$. Ekkor

$$a_n = \frac{3^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \left(\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{3}{n} \le \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \to 0.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = 0.$$

2*. *Példa.* $a > 0$ tetszőleges.

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\qquad a < 1$ vagy $a > 1$?

Rekurzív számsorozatok

Példa. (a_n) **rekurzióval** van definiálva:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 1 \quad \text{ha} \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Számoljuk ki néhány elemét:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 1 = 2, \quad a_3 = 2 + 1 = 3, \ldots$$

Látszik, hogy $a_n \to \infty$.

Példa. (a_n) **kétlépéses rekurzióval** van definiálva:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{ha} \quad n = 3,\ 4,\ \ldots$$

Számoljuk ki néhány elemét:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 + 1 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5 \ldots$$

Fibonacci sorozat. (*XII*.sz. pl. *képzeletbeli nyúlcsalád növekedése*.)

Egy példa

(a_n) így van definiálva **rekurzióval**:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad \text{ha} \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Számoljuk ki néhány elemét:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4, \quad a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5, \ldots \quad a_6 = 5.875.$$

"Látszik", hogy $(a_n) \nearrow$. Vajon $+\infty$-be tart most is?

Állítás. $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$. Teljes indukció.

1. lépés. $a_1 < a_2$ $\surd$.

2. lépés. Tfh. $a_n < a_{n+1}$ egy fix n-re.

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_n + 6) = a_{n+1} \quad \surd$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6),$$

Beláttuk, hogy $(a_n) \nearrow$

Állítás. $a_n < 6$, $\forall n$. Teljes indukció.

1. lépés. $a_1 = 2 < 6$ $\surd$.

2. lépés. Tfh. $a_n < 6$ egy fix n-re.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) < \frac{1}{2}(6 + 6) = 6. \quad \surd$$

Együtt: (a_n) *monoton és korlátos.* $\Longrightarrow$ (a_n) *konvergens*.

Mennyi $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2}(A + 6) \quad \Longrightarrow \quad A = \lim_{n\to\infty} a_n = 6$$

.

Az e számról.

(Ism) **Definíció.** Az e - EULER-FÉLE SZÁM: $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$,

$\forall (n_k)$ indexsorozatra

$$\lim_{n_k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e.$$

Folytatás: vajon $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n =?$

$$(1+\frac{2}{n})^n = (1+\frac{1}{n/2})^{2\cdot\frac{n}{2}} = \left((1+\frac{1}{n/2})^{n/2}\right)^2.$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n = e^2, \quad \text{SŐT:} \quad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Számtani átlag sorozatok

Állítás. Tfh. (a_n) nullsorozat. Legyen

$$A_n := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0.$

Bizonyítás. Első becslés: (a_n) korlátos is, $\implies$ $|a_n| \leq K$.

Következő becslés:

$$|A_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$ küszöbindex: $\forall n \geq N$: $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ezekre az n indexekre

$$|A_n| \leq \frac{|a_1| + \ldots + |a_N| + |a_{N+1}| + \ldots + |a_n|}{n} \leq$$

$$\leq \frac{N}{n}K + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} < \frac{N}{n}K + \frac{\varepsilon}{2},$$

Vajon $\dfrac{N}{n}K \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$? Hát persze, ha : $n \geq \dfrac{2NK}{\varepsilon} = N_1. \surd.$

$$\forall n > N,\ N_1 \implies |A_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \surd$$

Megjegyzés.

Az állítás megfordítása nem igaz!

$$A_n \to 0 \quad \not\Rightarrow \quad a_n \to 0.$$

Ellenpélda: Ha $a_n = (-1)^n$, akkor a számtani átlag sorozat

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n = 2k \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

A_n nullsorozat, bár (a_n) *divergens.*

1. Következmény

Legyen (a_n) konvergens, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor a számtani átlag sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff (a_n - A)$ *nullsorozat*.

Legyen $b_n := a_n - A$. A számtani átlag sorozata

$$B_n = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = \frac{a_1 - A + \ldots a_n - A}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - A.$$

Az előző tétel $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0. \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} A_n - A = 0.$$

Valóban $\lim_{n\to\infty} A_n = A.$

2. Következmény

Állítás. Legyen (a_n) pozitív tagú sorozat, és

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

a mértani átlagok sorozata. Tfh. (a_n) nullsorozat, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} G_n = 0.$$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség miatt

$$0 < G_n \leq A_n.$$

Mivel (A_n) nullsorozat, ezért (G_n) is az.

Torlódási pont

Definíció. Az (a_n) sorozat TORLÓDÁSI PONTJA t, ha t bármely környezetében végtelen sok tagja van a sorozatnak.

Más szavakkal: $\forall \varepsilon > 0$ esetén a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallumban a sorozatnak végtelen sok tagja van.

Határérték mennyiben más?

$\longrightarrow$ környezeten **kívüli** tagok száma?

Példa. $a_n = (-1)^n$.

Ennek két torlódási pontja van, $t_1 = 1$ és $t_2 = -1$.

Példa

"Összefésült" sorozatok. Legyen két konvergens sorozat:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1}.$$

Definiáljunk egy harmadik sorozatot:

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{ha} \quad n = 2k \\ \\ b_n & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

A (c_n) sorozatnak **két** torlódási pontja van, 0 és 1.

Torlódási pontokról

Állítás. Ha (a_n)-nek *több* torlódási pontja van, akkor **nem konvergens**.

Állítás. Ha (a_n) **konvergens**, akkor *egyetlen* torlódási pontja van.

Fordítva?

Ha (a_n)-nek *egyetlen* torlódási pontja van, akkor. **konvergens**?

Példa olyan (a_n) sorozatra, melynek torlódási pontjai $1, 2, 3, \dots$?

Definíció. Legyen $\mathcal{T} :=$ *torlódási pontok halmaza.*

Ha $\mathcal{T}$ felülről korlátos, akkor $\sup \mathcal{T} :=$ LIMES SUPERIOR. Jelölése

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Ha $\mathcal{T}$ alulról korlátos, akkor $\inf \mathcal{T} :=$ LIMES INFERIOR, Jelölése

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n.$$