Számsorozatok 3.

2020. szeptember 16.

Határérték (ism.)

Definíció. Az (a_n) sorozat KONVERGENS és HATÁRÉRTÉKE A, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ (küszöbindex) melyre

$$n > N \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A.$

Definíció. Ha (a_n) nem konvergens, akkor DIVERGENS

1. típusú divergencia. (a_n) $\pm\infty$-HEZ TART (*divergál!*).

2. típusú divergencia. (a_n) elemei TÖBB PONT KÖRÜL TORLÓDNAK.

Konvergencia és korlátosság *(ism.)*

Állítás. Ha (a_n) *konvergens*, akkor *korlátos*.

Állítás.

1. Ha $(a_n) \nearrow$ *és felülről korlátos*, akkor konvergens.
2. Ha $(a_n) \searrow$ *és alulról korlátos*, akkor konvergens.

Bolzano-Weierstrass tétel.

Minden *korlátos* (a_n) sorozatnak van *konvergens részsorozata*.

Cauchy sorozat

Definíció. (a_n) eleget tesz a Cauchy feltételnek

(vagy Cauchy kritériumnak), ha:

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre

$$\forall n, m \geq N \quad \text{esetén} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ha (a_n) kielégíti a Cauchy feltételt, akkor Cauchy sorozat.

Cauchy sorozat és konvergencia

Tétel. Ha (a_n) *konvergens*, akkor *Cauchy sorozat*.

Bizonyítás. Tfh (a_n) konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Ekkor $\exists N$ küszöbindex, melyre

$$\forall n, m > N : \qquad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tétel. (*Az előző Tétel megfordítása*) Ha (a_n) *Cauchy sorozat*, akkor konvergens.

Bizonyítás. Két Lemmán múlik. Ezek bizonyítása a jegyzetben van.

1. Lemma. Ha (a_n) eleget tesz a Cauchy kritériumnak, akkor korlátos.

2. Lemma. **Ha** az (a_n) Cauchy sorozatnak *van konvergens* (a_{n_k}) *részsorozata*, és $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$,

akkor (a_n) is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

A Tétel bizonyítása.

Tfh (a_n) Cauchy-sorozat.

1. *1. Lemma* $\Longrightarrow$ *korlátos*.

2. A *B-W tétel* miatt $\exists(a_{n_k})$ konvergens részsorozata.

3. *2. Lemma* $\Longrightarrow$ *az eredeti sorozat is konvergens*.

(a_n) konvergens $\Longleftrightarrow$ (a_n) Cauchy sorozat.

Cauchy sorozat, példa

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Becsüljük meg az n-dik és $2n$-dik tag különbségét:

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} =$$

$$= n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \quad a_{2n} - a_n > \frac{1}{2} \qquad \forall n.$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ esetén ~~*Cauchy kritérium.*~~ $\Longrightarrow$ (a_n) nem konvergens.

Vajon $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to ?$

Konvergencia monotonitása

Állítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Ha

$$a_n < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor $A \leq B$.

Bizonyítás. Triviális.

Konvergencia monotonitása, kiegészítések

1. *Megjegyzés.*

$$a_n < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad A \leq B$$

Bár a feltételben *szigorú egyenlőtlenség* van, mégis $A = B$ lehet.

Példa:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad < \quad \frac{1}{n} = b_n, \qquad n > 1$$

2. *Megjegyzés.* $a_n < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ helyett elegendő

$$a_n < b_n \qquad \forall n \geq N$$

Rendőr-elv

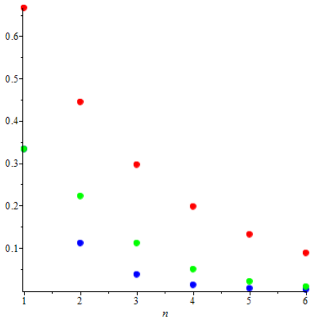
Tétel. Tfh (a_n) és (b_n) *közrefog* egy harmadik sorozatot:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tfh (a_n) és (b_n) konvergensek:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Ekkor (c_n) is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.



Rendőr-elv, bizonyítás

$\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik $\exists N_1$ küszöbindex, melyre

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{ha } n \geq N_1,$$

speciálisan $a_n > A - \varepsilon$.

Hasonlóan $\exists N_2$, melyre

$$|b_n - A| < \varepsilon \quad \text{ha } n \geq N_2,$$

speciálisan $b_n < A + \varepsilon$.

Ekkor $n \geq \max(N_1, N_2)$ esetén

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} c_n = A.$$

Példa

$a_n = \sqrt[n]{n}$. Hova tart? Tipp? Belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

$1 < a_n$ $\forall n > 1$-re. Ekkor

$$\begin{aligned} 1 < a_n &= \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1 \ldots \cdot 1} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1\ldots+1}{n} = \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 < a_n < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

$b_n \equiv 1$ és $c_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1$.

$b_n < a_n < c_n$ $\forall n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Az előző példa következménye

$p > 0$ tetszőleges, $a_n := \sqrt[n]{p}$.

(Már láttuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, most másképp is belátjuk.)

$\forall p > 0$-hoz $\exists N$ index,

$$1/n < p < n \qquad \forall n \geq N$$

$$\implies \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{p} < \sqrt[n]{n},$$

és emiatt $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} \leq 1$.

Nullsorozatok

Definíció. Az (a_n) konvergens sorozat NULLSOROZAT, ha *határértéke* 0.

Azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy

$$\forall n \geq N \qquad |a_n| < \varepsilon$$

Nullsorozatok tulajdonságai

Állítás.

1. (a_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$$\Updownarrow$$

$(b_n) = (a_n - A)$ nullsorozat.

2. Tfh. (a_n) nullsorozat, (b_n) korlátos sorozat.

Ekkor az $(a_n b_n)$ is nullsorozat, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

3. Tfh. (a_n) *divergens* és $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Legyen

$$b_n := \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\[2em] 0, & \text{ha} \quad a_n \le 0 \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, azaz (b_n) nullsorozat.

4. (a_n) nullsorozat $\iff$ $(|a_n|)$ nullsorozat.

5. Tfh. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Tfh. (b_n)-re $\exists k > 0$: $b_n \ge k$ $\forall n$.

   Ekkor: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Bizonyítás.

2. Ha (a_n) nullsorozat, (b_n) korlátos, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Egyrészt (b_n) korlátos $\Longrightarrow |b_n| \leq K$, $\forall n$.

Másrészt $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$:

$$\forall n \geq N : \qquad |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

$$\text{Együtt} \quad \Longrightarrow \quad |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

Bizonyítás.

3.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad b_n := \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{a_n}, & \text{ha} & a_n > 0 \\ \\ 0, & \text{ha} & a_n \leq 0 \end{array} \right\} \quad \text{nullsorozat}$$

$\forall \varepsilon > 0$ esetén $K = \dfrac{1}{\varepsilon}$-hoz $\exists N = N(K)$ küszöbindex:

$$\forall n \geq N : \qquad a_n \geq K (> 0)$$

Ekkor

$$|b_n| = \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{K} = \varepsilon$$

Többi bizonyítás HF.

Összehasonlító kritériumok

Állítás.

1. (*Majoráns kritérium.*)

   Ha (a_n) nullsorozat, és $|b_n| \leq |a_n|$ $\forall n$-re *(vagy rögzített N mellett minden $n > N$-re)*, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

2. (*Minoráns kritérium.*)

   Tfh. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, és $b_n \geq a_n$

   Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Alappélda

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |p| < 1 \\ 1, & \text{ha} \quad p = 1 \\ \infty, & \text{ha} \quad p > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad p \leq -1 \end{cases}$$

A $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = "\infty \cdot 0"$ típusú határérték "bármi" lehet. *($-\infty$ is?)*

1. *Példa.* $a_n = np^n$. Tfh. $0 < p < 1$. $\lim_{n\to\infty} np^n = ?$.

Átírjuk ilyen alakba: $a_n = np^n = (\sqrt[n]{n}p)^n$.

Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, ezért $\exists N$

$$\sqrt[n]{n} < \frac{1}{p} \qquad \forall n \geq N$$

Ezekre az n-ekre

$$|\sqrt[n]{n}p| < \frac{1}{p}p = 1.$$

Tehát létezik $0 < q < 1$, melyre

$$\sqrt[n]{n}p < q < 1.$$

Ezért $0 < a_n < q^n$, ha $n \geq N$, így a rendőrelv alapján $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.