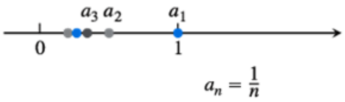
Számsorozatok 2.

2020. szeptember 14.

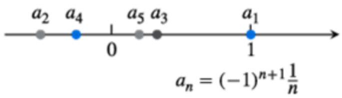
1. *Példa.* (ism.) $a_n = \dfrac{1}{n}$. A sorozat elemei: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots$



Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\exists N$ küszöbindex: $a_N \in (-\varepsilon, \ \varepsilon)$.

Sőt $\forall n > N$-re $a_n \in (-\varepsilon, \ \varepsilon)$, tehát $a_n \to 0$.

2. *Példa.* (ism.) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, a sorozat $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5} \dots$



Ekkor is $a_n \to 0$. Oszcillálva közelít 0-hoz.

3.*Példa.*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{ha} \quad n = 2k \\ \\ \dfrac{1}{n} & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}.$$

A sorozat elemei

$$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = \frac{1}{3};\ a_4 = \frac{1}{8};\ a_5 = \frac{1}{5};\ldots$$

Most is igaz, hogy $a_n \to 0$

4.*Példa.*

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor $a_n - 1$ tart a 0-hoz. Így $a_n \to 1$.

Számsorozat, 5. példa

$p > 0$ tetszőleges. Legyen $a_n = \sqrt[n]{p}$. Ha pl $p = 2$ akkor:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt[3]{2}, \dots \qquad \text{Rajz!}$$

1. eset Ha $p = 1$, ekkor $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$, így $a_n \to 1$.

2. eset Ha $p > 1$, ekkor $\sqrt[n]{p} > 1$, $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$, $h_n > 0$.

Így $p = (1 + h_n)^n$, és a Bernoulli egyenlőtlenséggel:

$$p = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n \quad \Longrightarrow \quad h_n \leqq \frac{p-1}{n} \ \to \ 0.$$

Most is $\sqrt[n]{p} \to 1$.

Számsorozat, 5. példa, folytatás

3. eset $p < 1$, $a_n = \sqrt[n]{p}$.

Ekkor $\frac{1}{p} > 1$, tehát a 2. esetnél leírtak miatt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} \to 1$$

.

Mivel $\sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}}$, ezért $\sqrt[n]{p} \to 1$.

Határérték

Definíció. Az (a_n) sorozat KONVERGENS és HATÁRÉRTÉKE A, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ (küszöbindex) melyre

$$\forall n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.$

Következmény. Ha a *sorozat határértéke A*, akkor $\forall \varepsilon > 0$-ra

- $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$-n **kívül** csak *véges sok* elem van.
- $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$-n **belül** *végtelen sok* elem van.

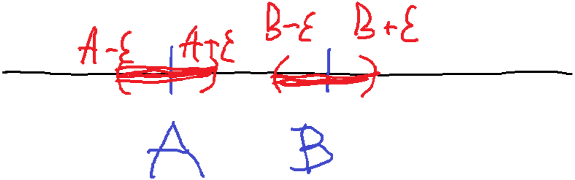
Egyértelmű?

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ akkor $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$-n kívül véges sok tag van.

Állítás. Ha egy sorozat *konvergens*, akkor a határérték *egyértelmű*.

Bizonyítás. Indirekt. Tfh $\exists A < B$, mint a definícióban.

Válasszuk meg az ε-t úgy, hogy $\varepsilon < \dfrac{B-A}{2}$ legyen.



Fejezzük be.

Divergens számsorozat

Definíció. Ha (a_n) nem konvergens, akkor DIVERGENS

Többféle divergencia van.

1. típusú divergencia. (a_n) $+\infty$-HEZ TART (*divergál!*), ha

$\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists N = N(K)$ küszöbindex, hogy

$$\forall n > N \implies a_n > K$$

Formális jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

"(a_n) *minden határon túl nő*".

Példa?

(a_n) $-\infty$-HEZ TART (*divergál*), ha $\forall K$-hoz $\exists N$ küszöbindex,

$$\forall n > N \implies a_n < K$$

Jele $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2. típusú divergencia. (a_n) elemei TÖBB PONT KÖRÜL TORLÓDNAK.

Például $a_n = (-1)^n$. A sorozat elemei: $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ldots$.

Nyilván nem konvergens.

3. típusú divergencia. Bármi más.

Számsorozat határérték. Általános definíció.

Definíció. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, ha A-nak $\forall U$ környezetéhez $\exists N = N(U)$ küszöbindex, melyre

$$\forall n > N \implies a_n \in U.$$

Ez a definíció alkalmazható $A \in \mathbb{R}$ vagy $A = \pm\infty$ esetén is.

Véges A mellett egy környezet $U = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$,

így $\quad a_n \in U \iff |a_n - A| < \varepsilon.$

$A = \pm\infty$ környezetei mi lehet?

Válasz.

Ha $A = +\infty$ akkor ennek a környezetei: $U = (K, \infty)$.

Ekkor $a_n \in U \quad \iff \quad a_n > K$.

Megjegyzés. Konvergens sorozatból akárhány elemet elhagyunk, az konvergens marad,

és ugyanahhoz a számhoz fog tartani, mint az eredeti.

Példa. Ilyen sorozat lehet $b_n = a_{2n}$

vagy $b_n = a_{n+100}$.

Konvergencia és korlátosság

Állítás. Ha (a_n) *konvergens*, akkor *korlátos*.

Bizonyítás. Tfh. (a_n) konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Ekkor $\varepsilon = 1$-hez is $\exists N$, hogy ha

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - A| < 1, \quad \Longrightarrow \quad A - 1 < a_n < A + 1.$$

Legyenek $m := \min\{a_n : \ n < N\}$ és $M := \max\{a_n : \ n < N\}$,

továbbá $k := \min\{m, A-1\}, \qquad K = \max\{M, A+1\}$.

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \qquad k \leqq a_n \leqq K.$$

Állítás. Ha (a_n) konvergens, akkor korlátos.

Fordítva?

Például az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

$$\text{konvergencia} \Rrightarrow \text{korlátosság}$$

$$\text{korlátosság} \not\Rrightarrow \text{konvergencia}$$

1. Állítás. Ha $(a_n) \nearrow$ *és felülről korlátos*, akkor konvergens.

2. Állítás. Ha $(a_n) \searrow$ *és alulról korlátos*, akkor konvergens.

Bizonyítás. 1. $\iff$ 2.

1. részt látjuk be. Tfh $(a_n) \nearrow$ *és felülről korlátos*

Legyen $H = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

$H \neq \emptyset$ felülről korlátos, $\Longrightarrow \exists \sup(H) =: A$.

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$-ra $A - \varepsilon$ nem felső korlát.

$\Longrightarrow$ létezik H-ban $a_N > A - \varepsilon$.

Monotonitás $\Longrightarrow a_n \geqq a_N$ ha $n > N$

ezért $a_n > A - \varepsilon$.

Mivel $a_n \leqq A = \sup(H)$ $\forall n$-re:

$$\underline{A - \varepsilon} < a_n \leqq A < \underline{A + \varepsilon} \qquad \text{ha} \quad n > N.$$

FONTOS példa. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Mit várunk? Tipp?

Gyakorlatokon lesz: $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$,

és hogy $(1 + \frac{1}{n})^n < 4 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ez azt jelenti, hogy

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

monoton növő és felülről korlátos. $\Longrightarrow$ (a_n) konvergens.

Definíció. Az e - Euler-féle szám:

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n, \qquad e \approx 2,718281...$$

A határérték alaptulajdonságai

Állítás. Tfh (a_n) és (b_n) konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

1. $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cA$.
2. $(a_n + b_n)$ is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.
3. $(a_n b_n)$ is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$.

Bizonyítás. " $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$"

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Vajon $|ca_n - cA| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$?

Ha $c = 0$, akkor triviális. $\surd$.

Tfh $c \neq 0$. Akkor $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$-hoz $\exists N$, melyre

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n > N.$$

Ezért ha $n > N$:

$$|ca_n - cA| = |c|\ |a_n - A| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Bizonyítás. " $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$"

$\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N_1$, hogy

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1.$$

Továbbá $\exists N_2$, hogy

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2.$$

Legyen $N := \max(N_1, N_2)$.

Ha $n \geq N$, akkor

$$|a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A határérték alaptulajdonságai, folytatás

Tfh (a_n) és (b_n) konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

4. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

5. Tfh. $A \neq 0$ és $a_n \neq 0$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{A}$.

5*. Az előző feltételekkel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{B}{A}$.

5.-ben feltétel enyhítés?

Bizonyítás. " $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$"

A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Ekkor van olyan N, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

és emiatt

$$||a_n| - |A|| \leq \varepsilon. \qquad \surd$$

Rész-sorozatok

Definíció. INDEX-SOROZAT: $k \quad \mapsto \quad n_k$ hozzárendelés.

$\forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow n_k$ index: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$

Definíció. Adott (a_n) sorozat. A RÉSZ-SOROZAT elemei

$$a_{n_1}, \; a_{n_2}, \; a_{n_3}, \; \ldots$$

Példa. (a_{2n}) rész-sorozat elemei: $a_2, \; a_4, \; a_6, \; \ldots$

Bolzano-Weierstrass tétel.

Tétel. Minden *korlátos* (a_n) sorozatnak van *konvergens részsorozata*.

Példa. $a_n = (-1)^n$. Korlátos. De NEM KONVERGENS.

Részsorozat, ami konvergens?

Lemma a bizonyításhoz

Lemma. Minden sorozatnak van *monoton részsorozata*.

Bizonyítás. Az a_n elem CSÚCS, ha

$$a_n \geq a_m \quad \forall m > n, \text{ azaz...}$$

<u>*1. eset.*</u> Végtelen sok csúcs van, ezek indexei

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

$\Longrightarrow \quad (a_{n_k}) \searrow \surd$. részsorozat monoton (?) fogyó.

<u>*2. eset.*</u> Véges sok csúcs van. Az utolsó csúcs indexe n.

(*Ha nincs csúcs, akkor* (?) $n = 0$.)

$n_1 := n + 1$. $\quad \Longrightarrow \quad a_{n_1}$ *nem csúcs*, $\Longrightarrow \exists n_2 > n_1,\ a_{n_2} > a_{n_1}$.

Stb. a_{n_2} nem csúcs, ezért $\exists a_{n_3}$, melyre $n_3 > n_2$ és $a_{n_3} > a_{n_2}$.

$\Longrightarrow \quad \exists (a_{n_k}) \nearrow$.

Bolzano-Weierstrass tétel. Bizonyítás

Tétel. Minden *korlátos* (a_n) sorozatnak van *konvergens részsorozata*.

Bizonyítás.

1. A Lemma szerint $\exists (a_{n_k})$ *monoton* részsorozat.
2. (a_{n_k}) részsorozat is *korlátos*.
3. (a_{n_k}) monoton és korlátos $\Longrightarrow$ *konvergens*.