Függvénysorok. 2. rész

2020. december 9.

Függvénysor összeg-függvényének tulajdonságai.

Függvénysor összege

Definíció. Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények. A $(\sum f_n)$ FÜGGVÉNYSOR ÖSSZEGE (*pontonként*) $f : D \to \mathbb{R}$, ha

$$\forall x \in D : \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x). \qquad \textit{sok-sok számsor}.$$

A $(\sum f_n)$ függvénysor EGYENLETESEN KONVERGENS és összege f, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ melyre

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N \quad \forall x \in D.$$

Példák

1. *Példa.* Láttuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *egyenletesen konvergens* $[0, q]$-ban, ahol $0 < q < 1$. (Weierstrass kritérium alapján.)

2. *Példa.* Legyen a $[0, 1]$-beli *racionális számok* felsorolása:

$$r_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Definiáljuk az alábbi függvényeket:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = r_n \\ 0 & \text{ha } x \neq r_n \end{cases}$$

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, ahol $f(x)$ a *Dirichlet függvény*.

Egyenletes-e a konvergencia?

Az összegfüggvény folytonossága

Tétel. Tfh az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények *folytonosak*.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens D-ben.

Ekkor $f : D \to \mathbb{R}$ is folytonos.

1. *Példa.* (folyt.) Láttuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenletesen konvergens $[0, q]$-ban, ahol $0 < q < 1$. Ennek összege $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, valóban folytonos $[0, q]$-ban.

Az összegfüggvény integrálhatósága

Tétel. Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ és $f : D \to \mathbb{R}$ függvények.

Legyen $[\alpha, \beta] \subset D$, és tegyük fel, hogy $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$

Tfh. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, egyenletes konvergenciával.

Ekkor az összegfüggvény is $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, és

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx, \qquad \text{„} \int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta \ldots\text{”}.$$

Fontos az egyenletes konvergencia!

2. *Példa.* (folytatás)

A függvénysor tagjait így definiáltuk:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = r_n \\ 0 & \text{ha } x \neq r_n \end{cases},$$

ahol $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Ekkor $f_n \in \mathcal{R}[0,1]$. Miért?

De $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a Dirichlet függvény, ami $f \notin \mathcal{R}[0,1]$.
A függvénysor konvergenciája *nem egyenletes*.

Deriválhatóság

Tétel.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens D-ben.

Tfh. az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak. Tfh. a

deriváltakból álló függvénysor is egyenletesen konvergens, összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$

és $g(x)$ folytonos. Ekkor $g(x) = f'(x)$.

Ekkor az összeadás és deriválás felcserélhetők:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Függvénysor összege.

Alkalmazás: Taylor sor

Taylor polinom. Ismétlés.

Definíció. Tfh f az x_0 pont környezetében n-szer diffható.

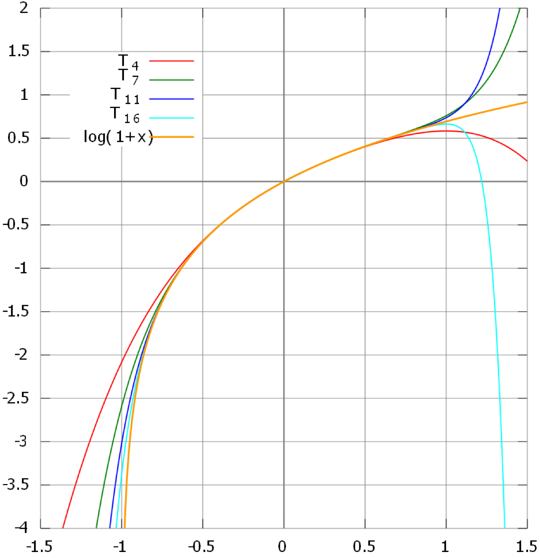
Az f függvény x_0-hoz tartozó n-ed rendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Kompakt jelöléssel:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$



Taylor polinom, hibababcslés

Definíció. A Lagrange-féle maradéktag:

$$L_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

Tétel.

Tfh. f $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy U környezetében.

Ekkor $\forall x \in U$ esetén $\exists \xi \in (x, x_0)$ (vagy $\xi \in (x_0, x)$), melyre:

$$L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Közelítés.

Ha f n-szer differenciálható $x_0 \in \operatorname{int} D_f$-ben, akkor

$$f(x) \approx T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

Taylor polinommal közelíthető. Vajon $n \to \infty$?

Példa. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Mivel $f^{(n)}(x) = e^x$, ezért $f^{(n)}(0) = 1$.

Az n-ed rendű Taylor polinom az $x_0 = 0$ körül:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!}.$$

Pl. az $U = (-1, 1)$ környezetben

$$|e^x - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} \quad \to 0$$

Következmény

Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Így az $f(x) = e^x$ függvényt előállítottuk függvénysor összegeként.

Állítás. A fenti függvénysor minden $[a, b]$ intervallumon

egyenletesen konvergens.

$$\text{"}\lim_{n\to\infty} \text{Taylor polinom"} \quad = \quad \textit{Taylor sor}.$$

Függvény előállítása Taylor sorának segítségével

Adott f függvény, mely $x_0 \in \operatorname{int} D_f$-ben végtelen sokszor diffható.

Definíció. Az f függvény x_0 pont körüli TAYLOR SORA:

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Megjegyzés. A Taylor sor pontos jelölése $T(x_0, x)$ lenne.

Az egyszerűség kedvéért az első argumentumot elhagyjuk.

$x_0 = 0$ esetén szokás a Taylor sor helyett *McLaurent sor*ról beszélni.

Taylor sor konvergenciája

$$f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Kérdések:

1. Milyen feltétellel igaz, hogy a Taylor sor összege f?

2. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített. Mit tudunk mondani az

   $\{x : \ f(x) = T(x)\}$ halmazról?

Példa

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ha\ x \neq 0 \\ \\ 0 & ha\ x = 0 \end{cases}$$

Legyen $x_0 := 0$. Könnyen igazolható, hogy itt f folytonos.

Számoljuk ki a deriváltját:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-x^2} = 0.$$

Belátható hasonló módon, hogy $f^{(n)}(0) = 0$ minden n-re.

Ekkor $T(x) \equiv 0$.

Csak egyetlen pontban, $x_0 = 0$, állítja elő a függvényt Taylor sora.

Taylor sor konvergenciája

Állítás.

$f : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható.

Tegyük fel, hogy az $f^{(k)}$ deriváltak egyenletesen korlátosak:

$$|f^{(k)}(x)| \leq K \qquad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ekkor $f(x) = T(x)$ teljesül $\forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ esetén

Bizonyítás.

Legyen $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ tetszőleges.

A Taylor sor $T(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, ezért

$$f(x) - T(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right).$$

A Lagrange féle maradéktag:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

A feltétel szerint $|f^{(n+1)}(\xi)| < K$, így

$$|f(x) - T(x)| \leq \lim_{n\to\infty} K \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Példák

1. Exponenciális függvény. Az $f(x) = e^x$ függvény Taylor sora:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x_0 = 0.$$

2. Logaritmus függvény $f(x) = \ln(x)$ Taylor sora $x_0 = 1$ körül:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Bizonyítás. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\dots$, teljes indukcióval

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n} \implies f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Megjegyzés. $T(x) = \ln(x)$ ha $x \in (0,2)$. (*Ld. Anal2.*)

3. Sinus függvény $f(x) = \sin(x)$ Taylor sora $x_0 = 0$ körül:

$$T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Bizonyítás. A deriváltak:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & ha \quad k = 4n+1 \\ -1 & ha \quad k = 4n+3 \\ 0 & ha \quad k = 2n \end{cases}.$$

A deriváltak egyenletesen korlátosak:

$$|\sin^{(k)}(x)| \leq 1 \qquad k = 1, 2, \dots \quad x \in \mathbb{R},$$

ezért $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ minden $x \in \mathbb{R}$

4. Cosinus függvény Az $f(x) = \cos(x)$ Taylor sora $x_0 = 0$ körül:

$$T(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A deriváltak itt is egyenletesen korlátosak:

$$|\cos^{(k)}(x)| \leq 1 \qquad k = 1, 2, \dots \quad x \in \mathbb{R}.$$

ezért $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ minden $x \in \mathbb{R}$.

Zárt alakban a trigonometrikus függvények:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Trigonometrikus- és exponenciális függvény

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Írjunk most x helyébe ix-t.

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots.$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

Felhasználjuk, hogy $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, stb. Ezért

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Rakjuk össze mindezt:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \Longrightarrow \quad \underline{e^{i\pi} = -1}.$$