Függvénysorozatok

2020. december 7.

Függvények sorozata

Függvénysorozat

Függvénysorozat = függvényekből álló sorozat

Definíció.

Adottak az $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, közös ÉT.

Ezek sorozatát FÜGGVÉNYSOROZATnak nevezzük. Jele (f_n).

Példa. $f_n(x) = x^n, \ \ x \in [0, 1]$.

Függvénysorozat határértéke

Definíció. Az (f_n) függvénysorozat HATÁRÉRTÉKE $f : D \to \mathbb{R}$,

$$\text{ha} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

A fenti definícióban $\forall x \in D$-re az $(f_n(x))$ számsorozat konvergens.

Ez a konvergencia *pontonkénti konvergencia*

1. *Példa.* $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 1 \\ 0 & \text{ha } x \in [0, 1). \end{cases}$$

2. Példa

Legyen $f_n(x) = \sin^n(x)$, a közös ÉT: $0 \le x \le \pi$.

A függvénysorozat határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \pi/2 \\ 0 & \text{ha } x \neq \pi/2. \end{cases}$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \pi/2 \\ 0 & \text{ha } x \neq \pi/2. \end{cases}$$

Cauchy kritérium függvénysorozatra

Tétel. (Cauchy-kritérium)

Az (f_n) függvénysorozat pontosan akkor konvergens, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz és $\forall x \in D$-hez $\exists N = N(\varepsilon, x)$ küszöbindex,

melyre $\forall n, m \geq N$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

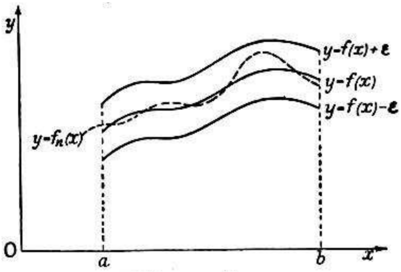
Egyenletes konvergencia

Definíció.

Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f-hez,

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$$



Itt az N küszöbindex csak ε-tól függ, $\forall x$ esetén jó!

Konvergenciák

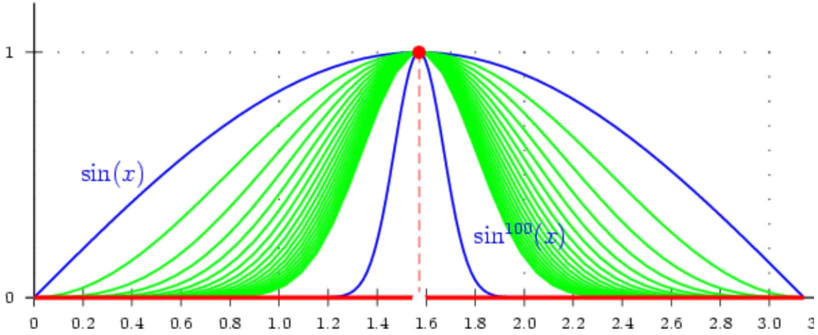
Állítás.

Ha Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f-hez D-ben, akkor pontonként is konvergál.

Pontonkénti konvergencia $\not\Longrightarrow$ egyenletes konvergencia

2. Példa folytatás

Legyen $f_n(x) = \sin^n(x)$, $x \in [0, \pi]$.



A függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.

$f_n(x) = \sin^n(x)$

Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Belátjuk, hogy $\forall N$-hez $\exists x \in [0, \pi)$, melyre $\sin^N(x) > \frac{1}{2}$

Valóban, $0 < \sqrt[N]{\frac{1}{2}} < 1$, így $\exists \eta \in (0, 1)$: $\eta > \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$.

Így ha $\sin(x) > \eta$, akkor $\sin^N(x) > \eta^N > \frac{1}{2}$.

Ezért N nem jó küszöbindex az $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez NINCS KÜSZÖBINDEX.

Elégséges feltétel egyenletes konvergenciára

Tétel.

Adottak $f_n,\ f : D \to \mathbb{R}$ függvények.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pontonkénti határérték.

Tegyük fel, hogy a függvények *korlátosak*, és

$$|f_n(x) - f(x)| < a_n \qquad \forall x \in D$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ esetén a fenti konvergencia egyenletes.

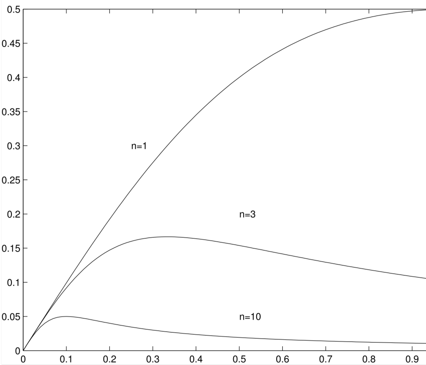
3. Példa

Legyen $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + x^2 n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

Könnyen látható, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$

esetén.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + x^2 n^2} = 0,$$



A pontonkénti határérték $f \equiv 0$.

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + x^2 n^2} \to 0$$

Vajon egyenletes-e a konvergencia?

Mivel $\forall f_n$ páratlan, ezért elegendő az $x > 0$ esetet vizsgálni.

Ekkor

$$0 < \frac{x}{1 + x^2 n^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1 + x^2 n^2}.$$

A jobboldal második tényezőjére $\dfrac{2nx}{1 + x^2 n^2} \leq 1,$

hiszen $\quad 2nx \leq 1 + x^2 n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq (1 - nx)^2 \ \surd$

Ezért $0 < \dfrac{x}{1 + x^2 n^2} \leq \dfrac{1}{2n} \quad \to 0.$

A korlát x-től független, ezért egyenletes a konvergencia.

Függvények végtelen sorai

Függvénysor összege, pontonként

Definíció.

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények, közös ÉT: D

A $(\sum f_n)$ FÜGGVÉNYSOR ÖSSZEGE $f : D \to \mathbb{R}$, ha $\forall x \in D$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x). \qquad \text{Jelölés}: \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$$

Definíció. (átfogalmazva)

Az (f_n) függvénysor konvergens és az összegfüggvény f, ha

$\forall x \in D$ esetén, $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon, x)$ melyre

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

Cauchy-kritérium függvénysorokra

Tétel.

A $(\sum f_n)$ függvénysor pontosan akkor konvergens *pontonként*, ha

$\forall x \in D$ esetén $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon, x)$, melyre

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad \forall n > m > N$$

Egyenletes konvergencia függvénysorokra

Definíció.

A függvénysor konvergenciája EGYENLETES,

ha a részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens,

azaz

$$F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

jelöléssel $F_n \to f$ egyenletesen.

Egyenletes konvergencia függvénysorokra

Példa. Tekintsük az alábbi végtelen sort

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

A függvénysor n-dik tagja tehát

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Meg akarjuk határozni a függvénysor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} =?$$

Példa, folyt.

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

$x = 0$ esetén az összegfüggvény $f(0) = 0$.

Ha $x \neq 0$, akkor x^2-t kiemelve egy mértani sort kapunk, melynek hányadosa $\frac{1}{1+x^2} < 1$. Ezért a függvénysor összege

$$f(x) = x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots\right) =$$

$$x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

Tehát az összegfüggvény

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1 + x^2, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

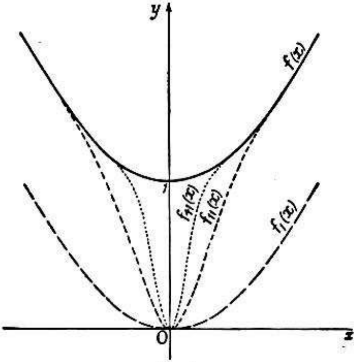


Fig. 7

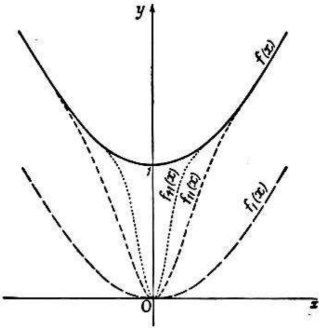


Fig. 7

Az öszegfüggvénynek 0-ban (megszüntethető) szakadása van.

A részletösszeg-függvények folytonosak, hiszen az összeadandók folytonosak.

Mégis, az összegfüggvénynek szakadása van.

Ennek oka abban rejlik, hogy *nem egyenletes a konvergencia.*

Az egyenletes konvergencia elégséges feltétele

Tétel.

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények, közös ÉT.

Tfh. a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor tagjai korlátosak, éspedig f_n korlátja

$$|f_n(x)| < a_n, \qquad \forall x \in D.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergens.

Bizonyítás.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ számtani sor konvergens.

Ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$, melyre $\forall n > m > N$ esetén

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon, \quad \forall x \in D.$$

A küszöbindex x-től független.

Példa

Legyen $f_n(x) = x^n$, $|x| \leq q < 1$, és q rögzített.

Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysort.

Mivel $|f_n(x)| = |x^n| \leq q^n$, és $\sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty$,

ezért $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenletesen konvergens $[-q, q]$-ban.

Az összegfüggvény $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Függvénysor összeg-függvényének tulajdonságai

Folytonosság

Tétel.

Tegyük fel, hogy az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények *folytonosak*.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens D-ben.

Ekkor $f : D \to \mathbb{R}$ is folytonos.

Bizonyítás.

Legyen $x_0 \in D$ tetszőleges. Itt f folytonos?

Bontsuk fel a végtelen összeget két részre.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n = F_n(x) + R_n(x)$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Az egyenletes konvergencia miatt $\exists N = N(\varepsilon)$, melyre $\forall n > N$:

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| = |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \forall x \in D.$$

Ezért

$$|R_n(x) - R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in D.$$

Újra: $f(x) = F_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n$

F_n véges sok folytonos függvény összege, ezért folytonos.

Ezért a fenti $\varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\forall |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |F_n(x) - F_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |F_n(x) - F_n(x_0)| + |R_n(x) - R_n(x_0)| < \varepsilon,$$

tehát f folytonos x_0-ban.

Integrálhatóság

Tétel.

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ és $f : D \to \mathbb{R}$ függvények.

Tfh. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, és a konvergencia egyenletes.

Legyen $[\alpha, \beta] \subset D$, és tegyük fel, hogy $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$

Ekkor az összegfüggvény is integrálható $[\alpha, \beta]$-n, és

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx.$$

Integrálhatóság

A tétel azt mondja ki, hogy az adott feltételek esetén

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

Deriválhatóság

Tétel.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens D-ben.

Tfh. az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak

Tfh. a deriváltakból álló függvénysor is egyenletesen konvergens,

összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$

és $g(x)$ folytonos.

Ekkor $g(x) = f'(x)$.

Deriválhatóság

Fontos feltétel a differenciálhatóságnál, hogy

– a *deriváltakból álló függvénysor* is egyenletesen konvergens.

Ekkor az összeadás és deriválás felcserélhetők:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

A tételt nem bizonyítjuk.