Differenciálegyenletek. 2. rész

2020. december 2.

Szeparábilis differenciálegyenlet. Ismétlés.

Elsőrendű DE általános alakja: $y' = f(x, y)$.

Szeparábilis = szétválasztható változójú

$$f(x, y) = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}, \qquad \beta(y) \neq 0$$

Ekkor a differenciálegyenlet ilyen alakú. $y' = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(y)}$

Formális megoldás: "$\beta(y)dy = \alpha(x)dx$."

"Kiintegrálva" már van értelme

$$\int \beta(y)dy = \int \alpha(x)dx.$$

Egy példa

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0$$

Formális átszorzással "$ydy = -xdx$"

Integrálással: $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$

Az általános megoldás $x^2 + y^2 = c$.

– Ha $y > 0$, akkor $y(x) = \sqrt{c - x^2}$

– Ha $y < 0$, akkor $y(x) = -\sqrt{c - x^2}$

Tehát csak $c > 0$ esetén kapunk nem triviális megoldást. Az ÉT is fontos!

Szeparábilis differenciálegyenlet. Alternatív alak.

Szeparábilis DE szorzat alakban:

$$y' = h(x)g(y)$$

Tfh $\exists y_0$, melyre $g(y_0) = 0$

$$\implies \quad y(x) \equiv y_0 \text{ megoldás. } \textit{Szinguláris} \text{ mo.}$$

Példa. $y' = x(y-1)$.

Első mo: $y_0(x) \equiv 1$. Ha $y \neq 0$, akkor "szokásos" módon:

$$\frac{1}{y-1}dy = xdx \quad \implies \quad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + c$$

Az általános megoldás:

$$y = 1 + Ce^{x^2/2}$$

Robbanás egyenlete

Tfh. a növekedés nagysága arányos a populáció négyzetével:

$$y' = ay^2$$

Ez egy szeparábilis DE.

$$\frac{y'}{y^2} = a \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2} dy = \int a\, dx$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} = ax + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{ax + c}.$$

Ha $a > 0$, akkor a populáció növekszik.

Mégis, $x \to \infty$ esetén $y \to 0$??? HOL A HIBA?

Robbanás egyenlete. $y' = ay^2$

Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{ax + c}.$$

Konkrét számokkal: $a = 1$ és $y(0) = 2$. Ezt behelyettesítve:

$$y(0) = -\frac{1}{c} = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}.$$

Tehát most a megoldás:

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - 2x}.$$

Ennek ÉT-a $[0, \frac{1}{2})$!

Tehát nem beszélhetünk arról, hogy $x \to \infty$.

Lineáris differenciálegyenlet

Elsőrendű DE általános alakja: $y' = f(x, y)$.

A DE $\textsc{lineáris}$, ha $f(x, y)$ lineáris y-ban:

$$f(x, y) = a(x)y + b(x).$$

Így a differenciálegyenlet

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

ahol $a(x)$, $b(x)$ adott függvények.

Ez a Lineáris DIfferenciál Egyenlet. LDE.

– Ha $b(x) \equiv 0$, akkor a DE *homogén lineáris*

– Ha $b(x) \neq 0$, akkor a DE *inhomogén lineáris*.

Homogén LDE

A homogén LDE $y' = a(x)y$ alakú. Ez szeparábilis.

Meg tudjuk oldani:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \quad \Rightarrow \quad „\frac{1}{y}dy = a(x)dx”.$$

Vezessük be a jelöléseket:

$$A(x) = \int a(x)dx, \quad B(y) = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y|.$$

Ekkor $\ln|y| = A(x) + C \quad \Longrightarrow \quad |y| = e^{A(x)+C}$, ahonnan

$$y = ce^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Állítás. A *homogén LDE* általános megoldása:

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Homogén LDE

Példa.

$$y' = \cos(x) \cdot y.$$

Itt $a(x) = \cos(x)$.

Ennek egyik primitív függvénye:

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = ce^{\sin(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Homogén LDE és kezdeti feltétel

A Cauchy feladat:

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Konkrét primitív függvényt használunk:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt.$$

Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt},$$

és a kezdeti feladat megoldása

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

Homogén LDE

Példa.

$$y' = \frac{y}{x}, \qquad y(1) = 2$$

Itt $a(x) = \dfrac{1}{x}$.

A kezdetiértéket figyelembe véve a primitív függvény:

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln(t)\Big]_1^x = \ln(x) - \ln(1)$$

A Cauchy feladat megoldása:

$$y(x) = 2e^{\ln(x)} = 2x.$$

Ellenőrzés!

Állandó együtthatós eset

Speciálisan, ha

$$y' = ay,$$

azaz $a(x) \equiv a$ konstans, akkor

$$A(x) = \int a \, dx = ax + c,$$

és így a megoldás

$$y(x) = ce^{ax}.$$

Állandó együtthatós eset. $y' = ay$, $y(x) = ce^{ax}$.

Kezdeti érték (Cauchy) feladat.

A DE mellett adott egy kezdeti feltétel is, $y(x_0) = y_0$.

Az általános megoldásban szereplő c meghatározható:

$$y(x_0) = ce^{ax_0} = y_0,$$

és ebből

$$c = y_0 e^{-ax_0}.$$

A Cauchy feladat megoldása

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Inhomogén LDE. $y' = ay + b$

Argumentumokkal $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.

Tétel. A LDE megoldásainak struktúrája:

1. Ha y_1 a <u>homogén</u> LDE mo-a és y_2 az <u>inhomogén</u> LDE mo-a

$$\Downarrow$$

$y_1 + y_2$ az <u>inhomogén</u> LDE mo-a

2. Ha y_1 és y_2 az <u>inhomogén</u> LDE mo-a

$$\Downarrow$$

$y_1 - y_2$ a <u>homogén</u> LDE mo-a

Inhomogén LDE. $y' = ay + b$

Következmény.

Ha a homogén egyenlet általános megoldása $y_{hom,a}$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása $y_{inhom,p}$.

Ekkor az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{inhom,a} = y_{hom,a} + y_{inhom,p}.$$

Feladat: Az inhomogén egyenlet EGYETLEN (tetszőleges) megoldása?

$y' = ay + b$. Állandók variálása.

A homogén egyenlet mo-a $y = ce^{A(x)}$, ahol $c \in \mathbb{R}$, $A'(x) = a(x)$.

Az inhomogén egyenlet megoldását így keressük:

$$y = u(x)e^{A(x)}, \qquad u = u(x) = ?$$

$(c \simeq u(x))$, konstans helyett függvény.

Ekkor a DE baloldala $y' = u'e^A + ue^A A' = u'\,e^A + u\,e^A\,a$.

Másrészt, a DE jobboldala $ay + b = a\,u\,e^A + b$.

Összehasonlítva a két egyenletet:

$$u'\,e^A + u\,a\,e^A = a\,u\,e^A + b$$

$u' \, e^A + u \, a \, e^A = a \, u \, e^A + b$

Ebből egyszerűsítve

$$u' e^A = b \;\Rightarrow\; u' = b e^{-A} \;\Rightarrow\; u(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

Az inhomogén DE partikuláris megoldása, $y = u(x) e^{A(x)}$:

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

Az inhomogén DE általános megoldása:

$$y(x) = \underbrace{e^{A(x)} \Big(c}\; + \underbrace{\int b(x) e^{-A(x)} dx}\Big)$$

– az első tag a *homogén* egyenlet általános megoldása,

– a második az *inhomogén* egyenlet egy konkrét megoldása.

Egy példa

$$y' = -xy - x. \qquad a(x) = -x, \quad b(x) = -x$$

A megoldás több lépcsőben történik.

1. lépés A homogén egyenlet megoldása.

$$A(x) = \int a(x)dx = \int (-x)dx = \frac{-x^2}{2},$$

az általános megoldás

$$y_h(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$y' = -xy - x$

2. lépés Az inhomogén egyenlet megoldása.

$$y_{ih} = u e^{\frac{-x^2}{2}}, \qquad u(x) = ?$$

$$\begin{aligned} y'_{ih} &= u' e^{\frac{-x^2}{2}} + u e^{\frac{-x^2}{2}} (-x) \\ &= -xy - x = -x \cdot u e^{\frac{-x^2}{2}} - x \end{aligned}$$

Összehasonlítva:

$$u' e^{\frac{-x^2}{2}} + u e^{\frac{-x^2}{2}} (-x) = -x \cdot u e^{\frac{-x^2}{2}} - x \;\Rightarrow\; u(x) = -e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Az inhomogén egyenlet *egyik* megoldása.

$$y_{ih} = \left(-e^{\frac{x^2}{2}}\right) e^{\frac{-x^2}{2}} = -1$$

$y' = -xy - x$

3. lépés Az általános megoldás.

Eddigi eredmények:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= ce^{\frac{-x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R} \\ y_{ih}(x) &= -1 \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\boxed{y(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1 \qquad c \in \mathbb{R}}$$

$y' = -xy - x$

Ellenőrzés. $y(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1 \qquad c \in \mathbb{R}$

A DE baloldala:

$$y'(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}}(-x)$$

A DE jobboldala:

$$-x \cdot y(x) - x = -x\left(ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1\right) - x = -x \cdot ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

Ezek valóban megegyeznek. $\surd$

Egy példa

Tekintsük az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$y' = -\frac{2}{x}\,y + 4x \qquad y(1) = 2$$

Itt $a(x) = -\dfrac{2}{x}, \quad b(x) = 4x$

1. lépés A homogén egyenlet megoldása.

$$A(x) = \int_1^x a(t)dt = \int_1^x \left(-\frac{2}{t}\right) dt = -2\ln(x) = \ln\left(x^{-2}\right),$$

az általános megoldás

$$y_h(x) = ce^{\ln\left(x^{-2}\right)} = \frac{c}{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y' = -\frac{2}{x} y + 4x \qquad y(1) = 2$$

2. lépés Az inhomogén egyenlet megoldása.

$$y_{ih} = u \cdot \frac{1}{x^2}, \qquad u(x) = ?$$

Az általános képlet szerint

$$u(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx.$$

Most tehát egy konkrét megoldásra

$$u(x) = \int 4x \cdot e^{2\ln(x)} dx = \int 4x^3 = x^4.$$

Az inhomogén egyenlet egyik megoldása.

$$y_{ih} = x^4 \cdot \frac{1}{x^2} = x^2.$$

$y' = -\frac{2}{x} y + 4x, \;\; y(1) = 2$

3. lépés Az általános megoldás.

Eddigi eredmények:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= \frac{c}{x^2}, \quad c \in \mathbb{R} \\ y_{ih}(x) &= -x^2 \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{alt}(x) = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

$y' = -\frac{2}{x}\, y + 4x,\ y(1) = 2$

Az általános megoldás: $y_{alt}(x) = \dfrac{c}{x^2} + x^2$.

4. lépés A kezdeti érték feladat megoldása

$$y(1) = c + 1 = 2 \ \Rightarrow \ c = 1$$

A feladat megoldása $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{x^2} + x^2}$

Szeparábilisra visszavezethető DE

Tegyük fel, hogy a DE

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

alakú.

Ekkor $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ helyettesítéssel a DE így transzformálódik:

$$u' = \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{f(u) - u}{x},$$

ami egy szeparálható DE.

Példa

Tekintsük az alábbi DE-t:

$$y' = \frac{2y^2 + x^2}{xy} \qquad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

A jobboldal $\dfrac{y}{x}$ függvénye, hiszen

$$f(x, y) = \frac{2y^2 + x^2}{xy} = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

Vezessük be az $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ új változót. Ekkor $f(u) = 2u + \dfrac{1}{u}$.

Ekkor a differenciálegyenlet:

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{1}{x}\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{x}\frac{u^2 + 1}{u}.$$

Ez szeparábilis, melynek megoldása:

Példa

A szeparábilis egyenlet $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{u^2+1}{u}$.

$$\int \frac{u}{u^2+1}du = \int \frac{1}{x}dx, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) = \ln x + c,$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\left(u^2+1\right) = 2\ln x + 2c = \ln\left(x^2\right) + 2c$$

azaz

$$u^2+1 = x^2e^{2c} = kx^2, \qquad k>0.$$

Az $u^2 = \dfrac{y^2}{x^2}$ kifejezést visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = kx^2,$$

tehát a megoldás

$$y^2 = kx^4 - x^2, \qquad \text{ahol } k>0.$$

Lineáris helyettesítés

Tegyük fel, hogy a jobboldal $f(ax+by)$ alakú:

$$y' = f(ax+by)$$

Ekkor

$$u(x) = ax + by(x)$$

helyettesítéssel szeparábilis DE-t kapunk:

$$u' = a + bf(u), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Példa

Tekintsük az alábbi kezdeti érték problémát:

$$y' = e^{2y+x} - \frac{1}{2}, \qquad y(0) = 0.$$

Lineáris helyettesítést alkalmazva legyen $u(x) := 2y(x) + x$.

Ekkor

$$u' = 2y' + 1 = 2(e^u - \frac{1}{2}) + 1 = 2e^u.$$

A $\frac{du}{dx} = 2e^u$ egyenlet megoldása:

$$\frac{1}{e^u}\frac{du}{dx} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \int e^{-u} du = \int 2 dx,$$

Példa. $y' = e^{2y+x} - \frac{1}{2}, \quad y(0) = 0.$

Eddig azt kaptuk, hogy $\int e^{-u} du = \int 2dx$.

$$-e^{-u} = 2x + c, \qquad e^{-2y-x} = -2x - c.$$

A kezdeti értéket behelyettesítve $e^0 = 0 - c$, vagyis $c = -1$.

Így a megoldás $e^{-2y-x} = 1 - 2x$, ahonnan

$$-2y - x = \ln(1-2x) \qquad \Rightarrow \qquad 2y = -x - \ln(1-2x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(-x - \ln(1-2x)).$$