Integrálszámítás 5. rész
Differenciálegyenletek

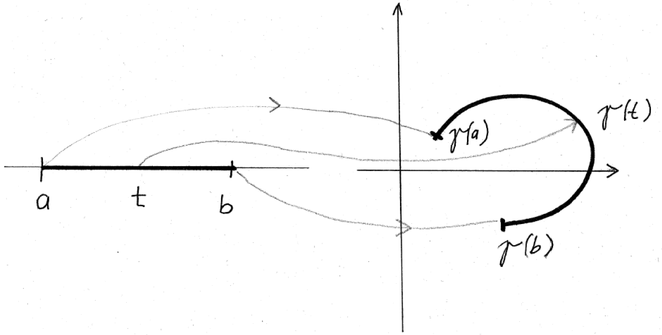
2020. november 30.

Jordan görbe. Ismétlés

Adott $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, azaz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.

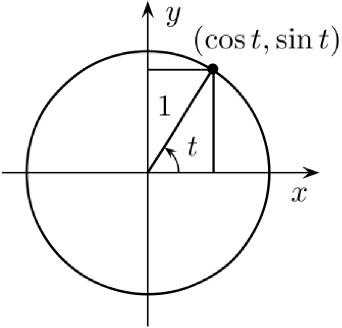
Tfh $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.

JORDAN GÖRBE. $L = \{(\gamma(t)) \ : \ t \in [a, b]\}$.



A Jordan görbe SIMA, ha az x és y függvények differenciálhatóak.

Példa. Egységkör



Ennek paraméteres megadása:

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Görbe ívhossz. $L = \{(x(t), y(t)) \ : \ t \in [a, b]\}$.

Állítás. (Ívhossz kiszámítása) Az L **sima** Jordan görbe ívhossza

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

"**Bizonyítás.** " $[a, b]$ felosztása $\mathcal{F} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$.

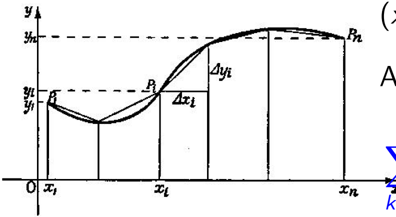


Fig. 11.—Rectification of curves

A görbe megfelelő pontjai: $(x_k, y_k) = (x(t_k), y(t_k))$

Az ívhossz egy közelítése: $s(\mathcal{F}) =$

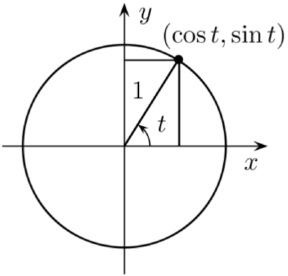
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Határátmenet. $\surd$ (Jegyzetben)

Példa

Egységkör paraméteres megadása:

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$



A deriváltak: $x'(t) = -\sin(t), \quad y'(t) = \cos(t).$

A körvonal hossza:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Speciális eset. $s(L) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

Ha a görbe egy differenciálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény gráfja,

akkor a paraméterezés:

$$x(t) = t, \qquad y(t) = f(t).$$

Így $x'(t) \equiv 1$.

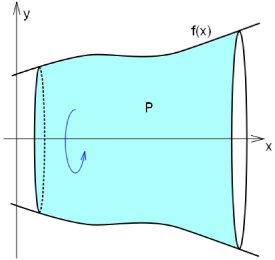
Állítás. Adott $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Akkor

a függvény gráfjának hossza

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Forgástest

Az $y = f(x)$ függvény gráfját megforgatjuk az x tengely körül.



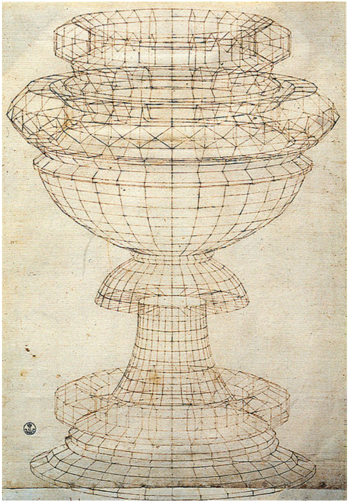
Állítás. Tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ diff-ható. Ekkor a forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

"**Bizonyítás.** " Felosztjuk $[a, b]$-t: $\mathcal{F} = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$.

A forgástestet kis hengerekkel közelítjük.
$V(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} f^2(x_k)\pi \cdot \Delta x_k$, ami egy integrálközelítő összeg.
$\to \surd$

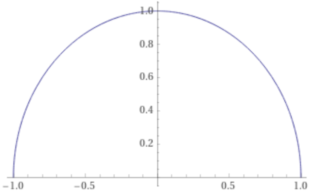
Egy rajz a XV. századból



A study of a vase as a solid of revolution by Paolo Uccello

Példa. Az egységgömb térfogata?

Egységkör felső felének megforgatása. RAJZ



$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

A gömb térfogata: ($V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$)

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \pi \int_{-1}^{1} 1 dx + \pi \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{4}{3}\pi.$$

Differenciálegyenletek

Egy példa

Láttuk, hogy ha $f(x) = e^x$, akkor $f'(x) = e^x$.

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = f(x).$$

Ha $g(x) = e^{ax}$, akkor $g'(x) = a \cdot e^{ax}$.

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = a \cdot g(x)$$

Jelölés: legyen $y = f(x)$ és $y' = f'(x)$. Ekkor $y = e^{ax}$ esetén

$$y' = ay.$$

Ennek a tulajdonságnak a *megfordítása* is igaz.

Egy példa, folytatás

Állítás. Ha egy $y = f(x)$ függvényre $y' = ay$, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$, melyre $y = ce^{ax}$.

Bizonyítás. A $z(x) := y(x)e^{-ax}$ függvény deriváltja:

$$z' = y'e^{-ax} + y(-a)e^{-ax} = aye^{-ax} + y(-a)e^{ax} = 0.$$

Tehát $z' = 0$, ezért $\exists c \in \mathbb{R}$, melyre $z(x) \equiv c$.

Azt kaptuk, hogy $ye^{-ax} \equiv c \quad \Longrightarrow \quad y = ce^{ax}$.

$y' = ay$ megoldása *konstans szorzóig egyértelmű*.

Mit nevezünk differenciálegyenletnek?

Feladat: Ismeretlen függvényt keresünk, $y = y(x) = ?$

Definíció. Differenciálegyenlet olyan **egyenlet**, melyben az ismeretlen egy függvény, és az egyenletben szerepel az ismeretlen függvény deriváltja is.

Differenciálegyenlet $\quad = \quad$ DE

Legegyszerűbb eset: *primitív függvény keresés*.

$$y' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y = ?$$

DE megoldása $\quad \approx \quad$ DE *integrálása*: $y = \int f(x)dx.$

Példa

Legyen a differenciálegyenlet

$$y' = 2x$$

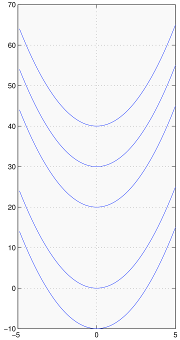
Ekkor

$$\int y' dx = \int 2x dx,$$

így a megoldás

$$y = y(x) = \int 2x dx = x^2 + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.



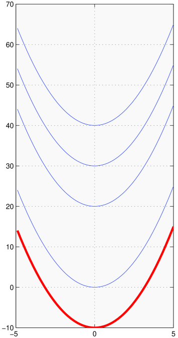
Ez az ÁLTALÁNOS MEGOLDÁS

$$y' = 2y \quad \Longrightarrow \quad y = x^2 + c$$

Végtelen sok függvényt kaptunk. A megoldást szűkítjük.

Azt az y megoldást keressük, melyre

$$y(2) = -6$$



Ekkor $y(2) = 2^2 + c = -6$ amiből

$c = \; -10.$

Tehát a megoldás: $y(x) = x^2 - 10.$

Ez egy PARTIKULÁRIS MEGOLDÁS.

DE jellemzői

A differenciálegyenletnek két változója van.

x a *független változó*,

$y = y(x)$ a *függő változó*.

Definíció. Differenciálegyenlet RENDje az ismeretlen függvény *legmagasabb fokú derivált*jának fokszáma.

1. *Példa.* $y' = y$ elsőrendű egyenlet. Megoldás?

2. *Példa.* $y'' + y = 0$ másodrendű egyenlet. Megoldás?

Elsőrendű DE

Az ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET általános alakja

$$y' = f(x, y),$$

ahol $f(x, y)$ adott *kétváltozós* függvény.

Definíció. A DE MEGOLDÁSA $y : I \to \mathbb{R}$, ahol

- $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum
- és
$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I.$$

Cauchy feladat

DE és **kezdeti érték** együtt: **Cauchy feladat**

x_0 és y_0 adott számok.

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Bizonyos feltételek mellett a Cauchy feladatnak egyértelmű megoldása van x_0 környezetében. (majd később pontosítjuk.)

Egy DE általános alakja : $y' = f(x, y)$.

Speciális alakú "jobboldal" esetén megoldjuk.

Speciális differenciálegyenletek

Szeparábilis differenciálegyenlet

Általános alak ez volt: $y' = f(x,y)$.

Szeparábilis = szétválasztható változójú

Tegyük fel, hogy $f(x,y)$-ban szétválasztható x és y:

$$f(x,y) = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}, \qquad \beta(y) \neq 0,$$

Ekkor a differenciálegyenlet ilyen alakú.

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}$$

Definíció. Ez a SZEPARÁBILIS vagy SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ DE.

Szeparábilis DE

Formális megoldás:

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}, \qquad \Longrightarrow \qquad \beta(y)dy = \alpha(x)dx.$$

"Kiintegrálva" már van értelme. Legyenek

$$B(y) = \int \beta(y)dy, \qquad A(x) = \int \alpha(x)dx.$$

Könnyen látható, hogy ha $y = y(x)$ megoldás, akkor

$$B(y) = A(x) + c.$$

Ebből y meghatározható.

Egy példa

$y' = \frac{y^2}{x^2}$ vagy másképp $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$

Formális átszorzással

$$„\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x^2}dx"$$

Integrálással megkapjuk a megoldást.

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}, \qquad \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x},$$

és innen

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{cx-1}{x}$$

Az általános megoldás tehát:

$$y = \frac{x}{1-cx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Növekedési folyamat

$y(x)$: populáció nagysága

Tfh a növekedés nagysága arányos a populációval:

$$y' = \alpha y$$

Pl. radioaktív bomlás. $y(x) = c \cdot e^{\alpha x}$ ($x \approx$ idő)

Legyen a kiinduló populáció $y(x_0) = y_0$. Ekkor

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\alpha(x - x_0)}$$

$\alpha < 0$: kihalás

$\alpha > 0$: növekedés

Robbanás egyenlete

Tfh. a növekedés nagysága arányos a populáció négyzetével:

$$y' = ay^2$$

Ez egy szeparábilis DE.

$$\frac{y'}{y^2} = a \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y^2} dy = \int a\, dx$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} = ax + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{ax + c}.$$

Ha $a > 0$, akkor a populáció növekszik.

Mégis, $x \to \infty$ esetén $y \to 0$??? HOL A HIBA?