Integrálszámítás 4. rész

2020. november 25.

Példák

1. *Példa.* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

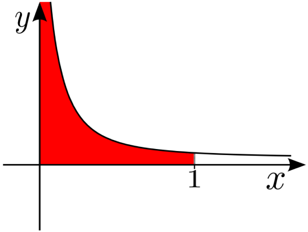
$$\implies \quad \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \quad \to \quad 2$$

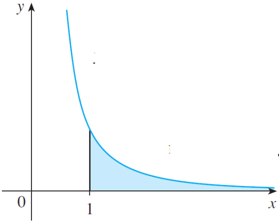
2. *Példa.* $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

$$\implies \quad \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^b = 2(\sqrt{b} - 1) \quad \to \quad \infty$$

Hatványfüggvény integrálja. Összefoglalás.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{ha} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$





$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{ha} \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

Majoráns kritérium

Tétel.

$f, g : I \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvények.

Tfh. $0 \le |f(x)| \le g(x)$ ha $x \in I$, és $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(x)dx < \infty$.

Ekkor $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ véges.

Bizonyítás. A monotonitás tulajdonságból $\surd$.

Majoráns kritérium, 1. következmény

Tétel. (Elégséges feltétel improprius integrál létezésére)

$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lok. integrálható, $a > 0$.

Tegyük fel, hogy $\exists c$ és $\exists \alpha > 1$ melyre

$$|f(x)| \leq c \cdot x^{-\alpha}, \quad \forall x \geq a$$

Ekkor $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ véges.

Bizonyítás. Hatványfüggvény integrálhatósága miatt.

Jelölés: $f(x) = O(\frac{1}{x^\alpha}), \quad x \to \infty.$

Majoráns kritérium, 2. következmény

Tétel. (Elégséges feltétel improprius integrál létezésére)

$f : (0, a] \to \mathbb{R}$ ahol $\lim_{x\to 0+} |f(x)| = \infty$, lok. integrálható. $a > 0$.

Tegyük fel, hogy $\exists c$ és $\exists \alpha < 1$ melyre

$$|f(x)| \leq c \cdot x^{-\alpha}, \quad 0 < x \leq a$$

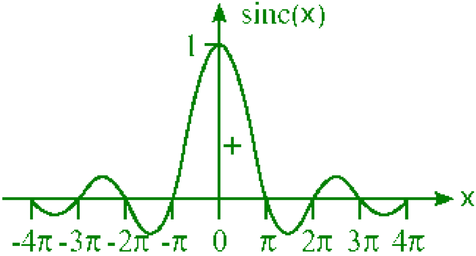
Ekkor $\int_0^a f(x)dx$ véges.

Bizonyítás. Hatványfüggvény integrálhatósága miatt.

Most $f(x) = O(\frac{1}{x^\alpha}), \quad x \to 0.$

Dirichlet-integrál

Példa. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = ?$



Ez a Dirichlet integrál.

Dirichlet-integrál

Két részre bontjuk

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = I_1 + I_2.$$

Az $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ függvény $[0,1]$-ben folytonos, tehát $I_1 < \infty$.

A másik integrált becsülni fogjuk.

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = ?$$

Parciálisan integrálunk, a "szereposztás"

$$f(x) = \frac{1}{x},\ g'(x) = \sin(x) \quad \to \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ g(x) = -\cos(x)$$

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

Határérték $b \to \infty$:

1. tag: $\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^b\right) = 0 + \cos(1).$

2. tag: majoráns kritériummal. $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$. Így $I_2 < \infty$.

Belátható, hogy $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. (Nem könnyű!)

Cauchy feltétel

Tétel. $f : I \to \mathbb{R}$, $I = (\alpha, \beta)$, lokálisan integrálható.

$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ **konvergens** $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists U(\alpha),\ U(\beta)$

környezetei α-nak és β-nak, melyekre

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U(\alpha): \quad \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in U(\beta): \quad \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

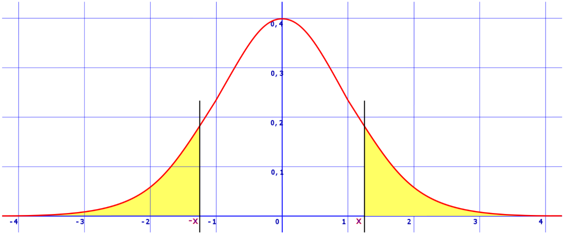
Cauchy feltétel

Következmény. $I = (-\infty, \infty)$ esetén.

Tegyük fel, hogy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty.$

Ekkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists K > 0$, melyre

$$\left| \int_{-\infty}^{-K} f(x)dx + \int_{K}^{\infty} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$



Minoráns kritérium

Tétel. $f, g : I \to \mathbb{R}$ adott lokálisan integrálható függvények, $I = (\alpha, \beta)$.

Tegyük fel, hogy $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$-re.

Ha $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \infty$, akkor $\int_\alpha^\beta g(x)dx = \infty$

Helyettesítés

Improprius integrálokban is lehet helyettesíteni – az ismert szabályokkal.

Példa. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =?$ Miért improprius?

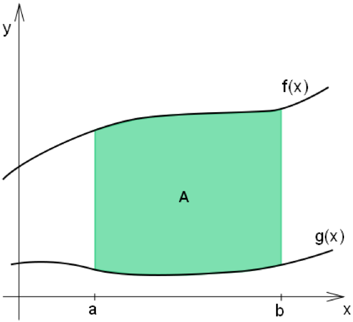
Helyettesítés: $x = \sin(t)$. Ekkor $dx = \cos(t)dt$.

Mivel $x = \sin(t) \ \in [0,1]$, ezért $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}.$$

Helyettesítéssel az *impropius* integrálból *közönséges* integrál lett.

Általános terület

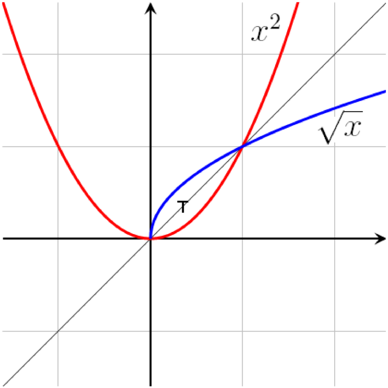


Az $y = f(x)$, $y = g(x)$ görbék és az $x = a$ és $x = b$ egyenesek közti terület nagysága:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

feltéve, hogy $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$-re

Példa

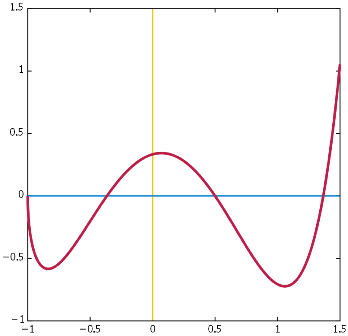


Az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ függvények közti terület:

$$T = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Görbe, vonal

Görbék megadása? Például: *függvény gráfjaként.*



A gráf pontjai: $(x, f(x))$, így a görbe:

$$L = \Big\{ (x, f(x)) \ : \ x \in [a, b] \Big\} \subset \mathbb{R}^2$$

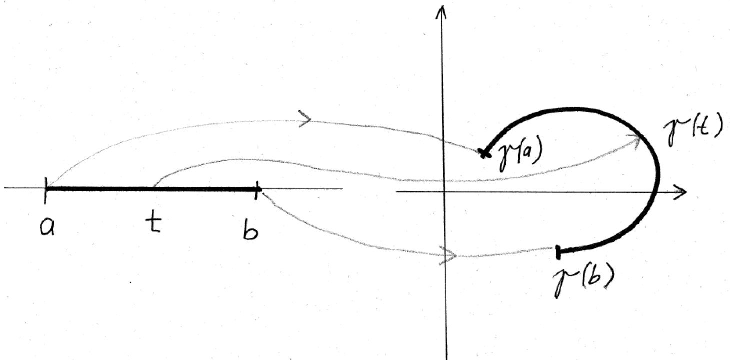
Jordan görbe

Adott $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, azaz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$.

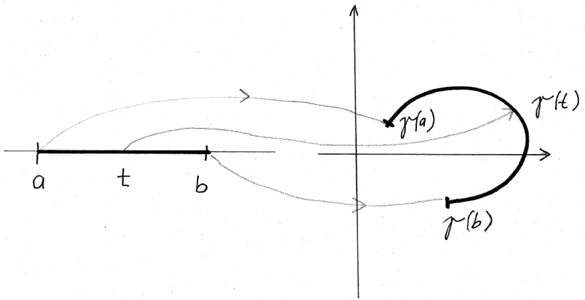
Tfh $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.

Definíció. A függvény **É**rték**K**észlete egy Jordan görbe.

$$L = \{(\gamma(t)) \ : \ t \in [a, b]\}.$$



Jordan görbe



Definíció.

A görbe KEZDŐPONTJA $\gamma(a) = A$, VÉGPONTJA $\gamma(b) = B$.

A Jordan görbe ZÁRT, ha $A = B$.

A Jordan görbe SIMA, ha az x és y függvények differenciálhatóak.