Valós számok bevezetése 2.

Számsorozatok 1.

2020. szeptember 9.

Infimum és Supremum (ism.)

A $H \neq \emptyset$ *felülről korlátos* halmaz legkisebb felső korlátját SUPREMUMnak nevezzük. $S = \sup(H)$, ha

- egyrészt S felső korlát, azaz $S \geq x$, $\forall x \in H$
- másrészt $\forall S'$ felső korlátra $S' \geq S$.

A $H \neq \emptyset$ *alulról korlátos* halmaz legnagyobb alsó korlátját INFIMUMnak nevezzük. $s = \inf(H)$, ha

- egyrészt s alsó korlát, azaz $s \leq x$, $\forall x \in H$
- másrészt $\forall s'$ alsó korlátra $s' \leq s$.

Tétel: "az infimum és supremum jól definiáltak"

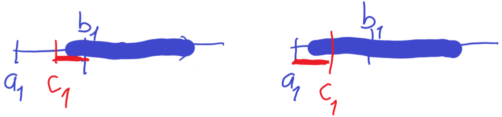
Tétel *Tfh H nem üres, alulról korlátos halmaz. Ekkor $\exists \inf H$.*
Tfh H nem üres, felülről korlátos halmaz. Ekkor $\exists \sup H$.

Konstruktív bizonyítás: H alulról korlátos, ezért $\exists a_1$ alsó korlátja.

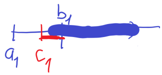
1. eset. Ha $a_1 \in H$, akkor $a_1 = \min(H)$, egyben infimum is. $\surd$

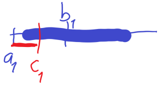
2. eset. Ha $a_1 \notin H$, akkor legyen $b_1 \in H$ tetszőleges, $b_1 > a_1$.

Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ számot.



$I_2 := [a_2, b_2]$-t fogunk definiálni. Két eset lehetséges.





- Ha c_1 alsó korlát, akkor $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$.

- Egyébként $a_2 := a_1$ és $b_2 \in H$, mely $a_1 < b_2 < c_1$.

Ezt a konstrukciót folytatjuk. $\longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$-re I_k intervallum:

1. a_k alsó korlát, $b_k \in H$
2. $I_k = [a_k, b_k]$ zárt és $I_{k+1} \subset I_k$.
3. I_k hossza $\leq 2^{-k} \cdot |I_1| \leq$ miért?

Cantor-féle közöspont-tétel feltételei $\surd \Rightarrow \exists! s$ *közös pont*.

$s = inf(H)$. *HF belátni.*

Definíció. Egy x_0 valós szám KÖRNYEZETEI az

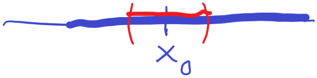
$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

nyílt intervallumok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám.

Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a H halmaz BELSŐ PONTJA, ha $\exists \varepsilon > 0$:

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq H.$$

A belső pontok halmazát $\mathrm{int}(H)$ jelöli. (Az *interior* szóból.)



Nyilván $\mathrm{int}(H) \subseteq H$.

Definíció. Ha $\mathrm{int}(H) = H$, a halmaz NYÍLT.

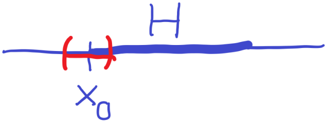
Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a H halmaz KÜLSŐ PONTJA, ha

$$\exists \varepsilon > 0 : \qquad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H = \emptyset.$$

A külső pontok halmazát $\mathrm{ext}(H)$ jelöli. ("*exterior*")

Nyilván $\mathrm{ext}(H) \cap H = \emptyset$.

Definíció. $x_0 \in \mathbb{R}$ a H halmaz HATÁRPONTJA, ha *sem külső, sem belső* pontja. Határpontok halmaza: $\partial(H)$. (Új betű: ∂)



$\forall \varepsilon > 0$-ra az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ környezet tartalmaz H-beli és H-n kívüli pontokat is.

Definíció. A H halmaz NYÍLT, ha minden pontja belső pont.

Definíció. A H halmaz ZÁRT, ha $\partial H \subseteq H$. $=?$

Definíció. A H HALMAZ LEZÁRÁSA $\overline{H} = H \cup \partial H$.

1. *Példa.* Legyen $H = (a, b)$ egy nyílt intervallum, ahol $a < b$.

Belső pontok halmaza és határpontok:

$$\mathrm{int}(H) = \{x : a < x < b\}, \qquad \partial(H) = \{a, b\}.$$

A lezárás: $\overline{H} = \mathrm{int}(H) \cup \partial H = [a, b]$.

2. *Példa.* $H = \{0 < x < 1 : x \in \mathbb{Q}\}$. $\frac{1}{2}$ belső pont-e? Nem!

A H halmazban belső pont NINCS. Miért?!

A halmaz határpontjai $\{x : \ 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$. (Intervallum!)

Háromszög egyenlőtlenség

Állítás. Tetszőleges a, b valós számokra

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bizonyítás. Abból a triviális egyenlőtlenségből indulunk ki, hogy

$$\pm a \leq |a|, \qquad \pm b \leq |b|.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a+b &\leq |a|+|b| \\ -a-b &\leq |a|+|b|, \quad \surd \end{aligned}$$

Az elnevezés ≈ *vektorok*. *Miért?*.

Háromszög egyenlőtlenség. Általános eset.

Tétel

Adottak az $a_1, a_2, ..., a_n$ *valós számok, akkor*

$$|a_1 + ... + a_n| \leq |a_1| + ... + |a_n|,$$

azaz $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$

Bizonyítás. Teljes indukcióval. Ha $n = 2$, akkor igaz. $\surd$

Tegyük fel, hogy n-re igaz. Ekkor

$$|\sum_{k=1}^{n+1} a_k| = |\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}| \leq |\sum_{k=1}^{n} a_k| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}|.$$

Miért kezdtük $n = 2$-vel?

Tétel (Bernoulli egyenlőtlenség)

$\forall n \in \mathbb{N}$ *és* $\forall h \geq -1$ *valós szám esetén:* $(1+h)^n \geq 1 + hn$.

Egyenlőség $\iff$ $n = 0$ *vagy* $n = 1$ *vagy* $h = 0$.

Bizonyítás. $h = 0$ esetén egyenlőség. $\surd$

$h \neq 0$ esetén teljes indukció. Ha $n = 1$ akkor $(1+h)^1 = 1 + h$, $\surd$

Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz: $(1+h)^n \geq 1 + hn$.

$$
\begin{aligned}
(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = \\
&= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h.
\end{aligned}
$$

Miért van a $h \geq -1$ feltevés?

Számtani és mértani közép

Tekintsünk két számot, $x, y \geq 0$.

Ezek SZÁMTANI KÖZEPE (számtani átlaga): $A = \dfrac{x+y}{2}$,

és MÉRTANI KÖZEPE (mértani átlaga): $G = \sqrt{xy}$.

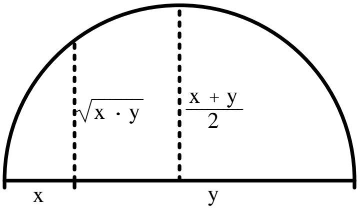
Állítás.

Minden x, $y \geq 0$ esetén

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Egyenlőség $\iff$ $x = y$.

Bizonyítás.



Számtani és mértani közép, általános eset

$a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ valós számok. Ezek SZÁMTANI ÁTLAGA (számtani közepe)

$$A := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

és MÉRTANI ÁTLAGA (vagy mértani közepe)

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

Tétel. A fenti jelölésekkel $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $A \geq G$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k},$$

és egyenlőség $\iff$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Számtani és mértani közép. Bizonyítás

1. Lemma. $n \geq 2$, adottak $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, nem mind egyforma. Tegyük fel, hogy

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1.$$

Ekkor $x_1 x_2 \ldots x_n < 1.$

Bizonyítás. Teljes indukcióval. Ha $n = 2$, akkor

$$x_1 = 1 + t, \qquad x_2 = 1 - t, \qquad t > 0.$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 x_2 = (1 + t)(1 - t) = 1 - t^2 < 1. \surd$$

Tegyük fel hogy valamely rögzített n-re igaz azállítás. Tekintsünk $n+1$ db számot, melyek számtani átlaga 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1+t_1 \\ x_2 &= 1+t_2 \\ &\vdots \\ x_n &= 1+t_n \\ x_{n+1} &= 1+t_{n+1} \end{aligned}$$

Adjuk össze a fenti egyenleteket.

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} t_k.$$

Mivel az x_1, x_2, $\ldots x_n$, x_{n+1} számok átlaga 1, ezért $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 0$.

Ekkor a $t_1, \ldots t_{n+1}$ számok közt *van pozitív es negatív* is. Miért?

Feltehető például, hogy $t_n < 0 < t_{n+1}$.

Az $n+1$ tényezős szorzat:

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n x_{n+1} = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1+t_n)(1+t_{n+1}) <$$

$$< x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1+t_n+t_{n+1}+\cancel{t_n t_{n+1}})$$

A szorzat utolsó tényezője $x_n^* := 1+t_n+t_{n+1}$.

Az n tényezős szorzatban a tényezők összege:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 1 + t_n + t_{n+1} = \cdots = n. \qquad \text{ellenőrzés!}$$

$\Longrightarrow$ adott n db szám, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^*, melyek átlaga 1.

$\longrightarrow$ Ha a számok egyformák, akkor szorzatuk épp 1.

$\longrightarrow$ Ha a számok nem egyformák, akkor szorzatuk kisebb, mint 1.

Miért? $\square$

2. Lemma. $x_k \geq 0$, $k = 1, \ldots n$ olyan számok, amelyekre

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1.$$

Ekkor $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$.

Tétel bizonyítása. $A := \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, és legyenek

$$x_k = \frac{a_k}{A}, \qquad k = 1, \ldots n.$$

A **2. Lemmát** alkalmazzuk az x_k, $k = 1, \ldots n$ számokra. Ekkor

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{A} = n,$$

ezért

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1 \qquad \Longrightarrow \quad x_1 x_2 \ldots x_n \le 1.$$

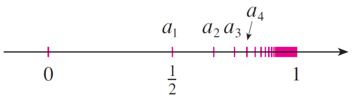
$$x_1 x_2 \ldots x_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{A^n} \le 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

Definíció. SZÁMSOROZAT: $n \quad \mapsto \quad a_n$ hozzárendelés.

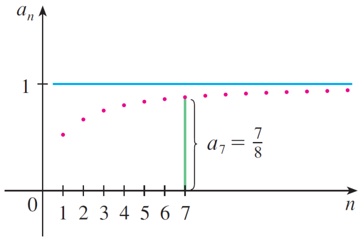
A sorozat n-dik elemét a_n jelöli, az egész sorozat (a_n).

Ábrázolás. *Példa.* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, azaz $n \quad \mapsto \quad \dfrac{n}{n+1}$.

1. Számegyenesen pontok



2. A síkon az (n, a_n) pontok



Alaptulajdonságok.

Definíció. (a_n) KORLÁTOS ha $\exists K$, hogy $|a_n| < K$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

(a_n) MONOTON NÖVŐ, ha $n < m$ esetén $a_n \leqq a_m$.

(a_n) MONOTON FOGYÓ, ha $n < m$ esetén $a_n \geqq a_m$

$\longrightarrow$ *Vajon n növelésével mi történik az a_n számokkal?*

Példa. $a \in \mathbb{R}$ irracionális szám, legyen a_n az *első n db jegy a végtelen tizedestört felírásában*.

Ekkor a_n "*egyre közelebb kerül a-hoz*". Ezt így jelölhetjük: $a_n \to a$

$\dashrightarrow$ HATÁRÉRTÉK

1. *Példa.* $a_n = \dfrac{1}{n}$. A sorozat elemei: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots$ RAJZ!

$\varepsilon > 0$ tetszőleges és a $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ intervallumot tekintjük.

Ekkor $\exists N$ küszöbindex: $a_N \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$, hiszen

$$\text{ha} \quad N > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{N} < \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \varepsilon.$$

Sőt $\forall n > N$-re $a_n \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$, tehát $a_n \to 0$.

2. *Példa.* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, a sorozat $-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{-1}{5} \dots$RAJZ!

Ekkor is $a_n \to 0$, mert

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ küszöbindex:} \quad \forall n > N, \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Oszcillálva közelít 0-hoz.