# Integrálszámítás 3. rész

2020. november 23.

# Newton-Leibniz formula. Ismétlés.

**Tétel.**

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tfh. $\exists F$ primitív függvénye:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a, b).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Más szóval: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

# Parciális integrálás.

# Parciális integrálás. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

**Tétel.**

Tfh $f, g$ $[a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatók. Ekkor

1. (Határozatlan alak)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

2. (Határozott alak)

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

**1. alapeset**

$$\boxed{\int \text{polinom} \cdot e^x dx}$$

## Parciális integrálás. $\int f'g = fg - \int fg'$

**2.** *Példa.* $\int x\cos(x)\ dx = ?$

"Szereposztás":

$$f'(x) = \cos(x),\ g(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = \sin(x),\ g'(x) = 1$$

Ezért

$$\int x\cos(x)dx = x\sin x - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c.$$

**2. alapeset**

$$\boxed{\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sin(x) \\ \cos(x) \end{array} \right\} dx}$$

## Parciális integrálás. $\int f'g = fg - \int fg'$

**3.** *Példa.*

$$\int x \ln(x) dx = ?$$

"Szereposztás":

$$f(x) = \ln(x),\ g'(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{x^2}{2},$$

tehát

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c.$$

**3. alapeset**

$$\boxed{\int \text{polinom} \cdot \ln(x) dx}$$

# Példák

**4.** *Példa.* $\int e^x \sin(x) dx = ?$

"Szereposztás":

$$f(x) = e^x,\ g'(x) = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x,\ g(x) = -\cos(x)$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int e^x \sin(x) dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx = (**).$$

Újabb parciális integrálás

$$(**) = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx.$$

Az ismeretlen integrálra egy összefüggést kaptunk. Így

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} \left(-e^x \cos(x) + e^x \sin(x)\right) + c.$$

# Példák

**4.** *Példa.* (általános eset)

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = ?, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a^2+b^2}\{(-be^{ax}\cos(bx) + ae^{ax}\sin(bx)\} + c.$$

**Bizonyítás.** **HF.**

# Helyettesítés

Az integrálási változó *bármi* lehet:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi)d\phi$$

$\phi$ lehet akár *függvény* is, $\phi = \phi(t)$

Mit értünk azon, hogy "$d\phi(t)$"?

Formálisan

$$\phi'(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi'(t)dt = d\phi(t).$$

# Helyettesítés. Határozatlan integrál

**Tétel.**

A helyettesítéses integrál alapformulája:

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)},$$

ahol $\phi$ szigorúan monoton függvény.

*Magyarázat:* A láncszabály

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t)) = f'(\phi(t))\phi'(t),$$

ezt integrálva kapjuk a fenti képletet.

# Helyettesítés. Határozott alak.

Tétel.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény

$\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ szigorúan monoton, differenciálható.

$$\phi(\alpha) = a, \qquad \phi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

# 1. Példa

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = ?$$

Helyettesítés: $x = \sin(t)$.

Ekkor $x \in [0,\ 1] \quad \Longleftrightarrow \quad t \in [0,\ \pi/2]$ és $dx = \cos(t)dt$.

Így az integrál:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\ \cos t\ dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

**HF** $x = \cos(t)$ helyettesítéssel hogyan lehet számolni?

# 2. Példa

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = ?$$

Helyettesítés: $u = 1 + x^2$. Ekkor $du = 2x\ dx$.

A határok: $x = 0 \quad \longrightarrow \quad u = 1$,

$$x = 1 \quad \longrightarrow \quad u = 2.$$

Így az integrál

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\ \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\Big[\ln(u)\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2).$$

# 3. Példa

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ?$$

Helyettesítés: $\sqrt{x} = t$, azaz $x = t^2$.

Ekkor $x \in [1,\ 4] \quad \Longleftrightarrow \quad t \in [1,\ 2]$, és $dx = 2t\ dt$.

Így az integrál:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\ 2t\ dt = 2.$$

# 4. Példa

$$\int \cos^3(x)dx = ?$$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Ezt beírjuk:

$$\int \cos^3(x)dx = \int (1 - \sin^2(x)) \ \cos(x)dx =$$

$$= \int \cos(x)dx - \int \sin^2(x) \ \cos(x)dx =$$

$$= \sin(x) - \int f^\alpha(x)f'(x)dx = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

# 5. Példa

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = ?$$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Ezt beírjuk:

$$? = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2x))dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Általános eset.

$$\int \sin^n(x)\cos^m(x)dx = ? \qquad n, m \in \mathbb{N}_0$$

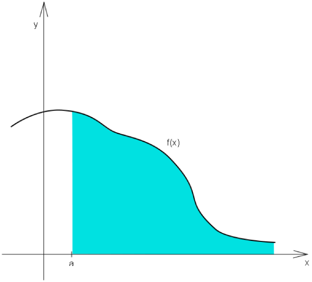
Részletek gyakorlatokon.

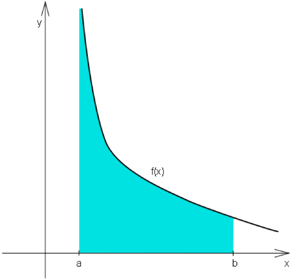
# Az improprius integrál definíciója

Riemann integrálhatóság: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre.

ÉT és ÉK *korlátos*.

Az intergálfogalmat kiterjesztjük:



# Lokálisan integrálhatóság

$f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

$\alpha = -\infty$ vagy $\beta = \infty$ is előfordulhat. Jelölés: $I = (\alpha, \beta)$.

Definíció. Az $f$ függvény LOKÁLISAN INTEGRÁLHATÓ,

ha $\forall [a, b] \subset I$ korlátos, zárt intervallum esetén $f\big|_{[a,b]} \in \mathcal{R}$.

Ezt így jelöljük: $f \in \mathcal{R}^{loc}(I)$.

# Improprius integrál

*Példa.* Az

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, +\infty)$$

függvény lokálisan integrálható, bár nem korlátos .

Definíció. $f \in \mathcal{R}^{loc}(I)$ IMPROPRIUS ÉRTELEMBEN INTEGRÁLHATÓ, ha

$$\lim_{\substack{a \to \alpha \\ b \to \beta}} \int_a^b f(x)dx =: \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

határérték létezik és véges.

# Improprius integrál

1. speciális eset. $\alpha = a \in \mathbb{R}$, $\beta = +\infty$

Ha $f$ impropriusan integrálható $(a, \infty)$-n, akkor

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

2. speciális eset. $\alpha = -\infty$, $\beta = b \in \mathbb{R}$.

Ha $f$ impropriusan integrálható $(-\infty, b)$-n, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

# Improprius integrál

Az integrál eddigi tulajdonságai megmaradnak:

- linearitás (összeg és skalárszoros integrálja)
- monotonitás
- Newton-Leibniz formula;

  feltéve, hogy a primitív függvény határértéke létezik.

# Példa

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

A véges intervallumon: Newton-Lebniz-formula alapján

$$\int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)\Big|_0^b = \arctan(b) - \arctan(0).$$

Ezért

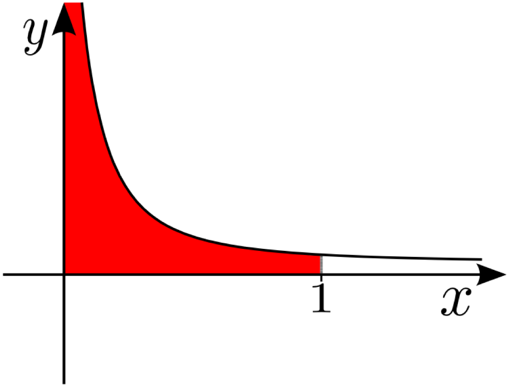
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}.$$

Emiatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

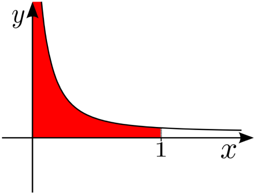
# Hatványfüggvény integrálja

Milyen $\alpha > 0$ esetén véges az $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ improprius integrál?




A függvény nem korlátos 0 körül, lokálisan integrálható $(0, 1)$-ben.

# Hatványfüggvény integrálja



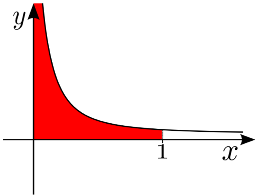

Az improprius integrál - ha létezik - így számolható:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

A primitív függvény

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \ln|x|, & \text{ha} \quad \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{ha} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

# Hatványfüggvény integrálja




**1. eset** Ha $\alpha \neq 1$:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

**2. eset** Ha $\alpha = 1$:

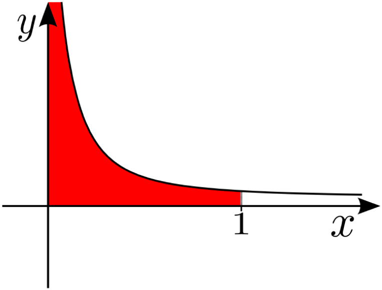
$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln \Bigg|_{\varepsilon}^{1} = -\ln(x)\varepsilon.$$

$\varepsilon \to 0+$ határátmenettel ezt kapjuk:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{ha} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha} \quad \alpha > 1 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} (-\ln \varepsilon) = \infty.$$

# Hatványfüggvény integrálja

Összefoglalva:




$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} < \infty & \text{ha} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

# Hatványfüggvény integrálja

Hasonlóképp $\alpha > 0$ esetén :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = ?$$

Kiszámítás: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx.$

**1.** Ha $\alpha \neq 1$

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha},$$

és ekkor

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad 1-\alpha > 0 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{ha} \quad 1-\alpha < 0 \end{cases}.$$

**2.** Ha $\alpha = 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^b = \ln b,$$

és

$$\lim_{b \to \infty} (\ln b) = \infty$$

Összefoglalva

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & \text{ha} \quad \alpha \leq 1 \\ & \\ < \infty, & \text{ha} \quad \alpha > 1 \end{cases} .$$

# Hatványfüggvény integrálja

A fenti két példából következik, hogy $\forall\alpha > 0$ értékre

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \infty$$

Az $f(x) = x^{-\alpha}$ függvény az $I = (0, \infty)$ intervallumban

**nem impropriusan integrálható** .