Integrálszámítás 2. rész

2020. november 18.

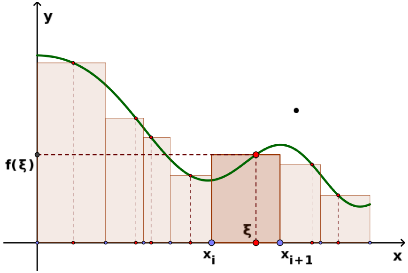
Riemann integrál, ismétlés

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tétel. Az integrál így számolható:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ahol $\delta(\mathcal{F}_n) \to 0$.



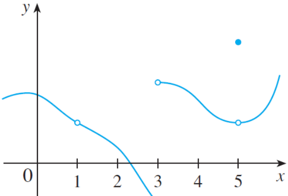
Megjegyzés. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds\ldots$

Elegendő feltételek integrálhatóságra. Ismétlés.

1. Kritérium Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos és monoton, akkor integrálható.

2. KritériumTétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor integrálható.

3. Kritérium Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, mely véges sok szakadási helytől eltekintve folytonos, akkor integrálható.



Newton-Leibniz formula

Tétel. (Newton-Leibniz formula).

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tfh. $\exists F$ primitív függvénye:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a, b).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Newton-Leibniz formula bizonyítás

Legyen $\mathcal{F}_n = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ egy felosztás.

F megszorítása egy részintervallumon: $F : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$.

A Lagrange-féle középérték-tétel szerint $\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, melyre

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(\xi_k) = f(\xi_k).$$

Ezt a *speciális* Riemann összeget nézzük:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{F}_n) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = F(b) - F(a)$$

Newton-Leibniz formula

Jelölés:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

A Newton-Leibniz-formulában melyik primitív függvény van?

Bármelyik!

Ha F és G primitív függvényei f-nek, akkor $\exists c$: $F = G + c$.

Ezért

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Példa

$f(x) = \sin(x)$

Egyik primitív függvénye $F(x) = -\cos(x)$, ezért

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0.$$

RAJZ!

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

RAJZ!

Definíció. Ha $b > a$, $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.

Ezért $\int_a^a f(x)dx = 0$.

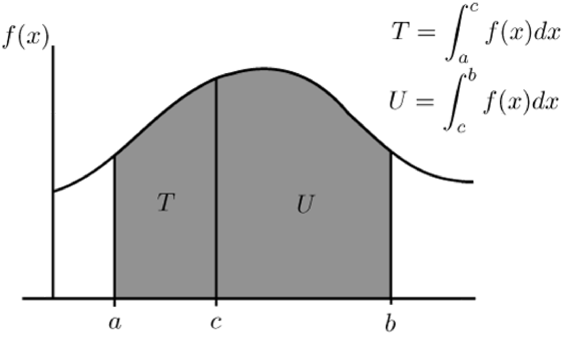
Jelölés. Riemann integrálható függvények halmaza:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}[a, b]$$

Riemann integrál tulajdonságai

1. Ha $f \in \mathcal{R}[a, c]$ és $f \in \mathcal{R}[c, b] \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{R}[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Riemann integrál tulajdonságai

2. (Linearitás) Ha $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ akkor $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ és

   $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$, továbbá

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

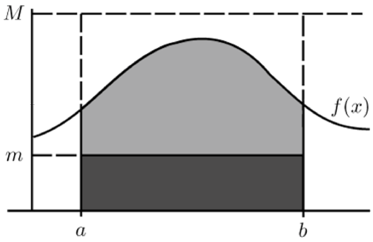
3. (Monotonítás) Ha $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ melyekre $f(x) \leq g(x)$

   $\forall x \in [a,b]$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

4. Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$, melyre $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$



5. (Háromszög egyenlőtlenség) Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor

$$|f| \in \mathcal{R}[a, b] \quad \text{és} \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bizonyítások

1.-4. Triviális, definíció alapján.

5. Monotonításból következik, felhasználva, hogy

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Megjegyzés. Ha $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$, akkor NEM biztos, hogy $f \in \mathcal{R}[a,b]$

Példa: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ az alábbi függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ -1 & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

Ekkor $f \notin \mathcal{R}$, nem integrálható, pedig $|f| \in \mathcal{R}$ (hiszen $|f| \equiv 1$)

Számtani közép – Integrálközép

Ismétlés. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ valós számok *számtani közepe*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{1 + \cdots + 1}.$$

Természetes általánosítása az *integrálközép*:

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{\displaystyle\int_a^b 1dx}.$$

Integrálközép

Definíció. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ INTEGRÁLKÖZEPE:

$$\kappa := \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Állítás. Tfh $f \in \mathcal{R}[a,b]$-re $m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,\ b]$.

Ekkor az integrálközépre is fennáll:

$$m \leq \kappa \leq M.$$

Bizonyítás. A monotonítást felhasználva:

$$\int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b M\ dx.$$

A konstans függvény integrálja: $\displaystyle\int_a^b m\ dx = m\ (b-a) \quad \Longrightarrow \quad \surd.$

Tétel. (Integrál középérték tétel) Tfh f folytonos.

Ekkor $\exists \xi \in [a, b]$, melyre

$$f(\xi) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Bizonyítás.

A Weierstrass II. tétel szerint $\exists \xi_1, \ \exists \xi_2 \in [a, \ b]$, melyekre

$$f(\xi_1) = m, \quad f(\xi_2) = M,$$

ahol a függvény minimuma m, maximuma M.

Mivel $m \leq \kappa \leq M$, ezért Bolzano tétel miatt $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, melyre

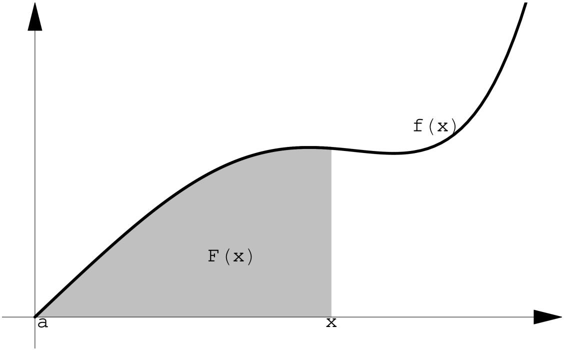
$$f(\xi) = \kappa.$$

Integrálfüggvény

Definíció. Legyen $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Az f függvény INTEGRÁLFÜGGVÉNYE $F : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)dt.$$



Integrálfüggvény

Tétel. (Az integrálszámítás II. alaptétele)

Az integrálfüggvény tulajdonságai:

1. F folytonos $[a, b]$-n.
2. Ha f folytonos, akkor F differenciálható, és
$$F'(x) = f(x).$$

Bizonyítás.

1. f korlátos: $|f(x)| \leq K$. Ekkor
$$|F(x) - F(x_0)| = |\int_{x_0}^{x} f(t)dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t)|dt \leq K|x - x_0|,$$
tehát valóban folytonos.

Bizonyítás. (folyt.)

2. Be kell látni, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = (*).$$

Ezt megbecsüljük. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\exists \delta > 0$:

$$|x - x_0| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

Ha $|x - x_0| \le \delta$ akkor a fenti kifejezésben:

$$(*) = \frac{|\int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0) dt|}{|x - x_0|} \le \frac{\varepsilon |x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon.$$

Példák

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

1. *Példa.*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$f'(x) = ? = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Példák

2. *Példa.*

$$g(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt, \qquad g'(x) = ?$$

Összetett függvényként:

$$g(x) = f(x^2), \qquad f(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Így

$$g'(x) = f'(x^2) \cdot 2x = \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} \cdot 2x = 2\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}.$$

Példák

2. *Példa.* (általános esetben)

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^{\alpha(x)} f(t)dt = f(\alpha(x))\alpha'(x)}$$

Bizonyítás. Láncszabályt alkalmazzuk.

Példák

3. *Példa.*

$$h(x) = \int_{x}^{1} \frac{\sin t}{t} dt, \qquad h'(x) = ?$$

Különbségként:

$$h(x) = \int_{0}^{1} \frac{\sin t}{t} dt - \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Így

$$h'(x) = 0 - \frac{\sin(x)}{x}$$

Példák

4. *Példa.* (szorgalmi)

$$k(x) = \int_{x}^{2x} \frac{\sin t}{t} dt, \qquad k'(x) = ?$$

Különbségként:

$$k(x) = \int_{0}^{2x} \frac{\sin t}{t} dt - \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Így

$$k'(x) = \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 - \frac{\sin(x)}{x}$$

Parciális integrálás

Ismétlés: szorzat függvény deriválási szabály

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Mindkét oldal primitív függvényét véve:

parciális integrálás

szabálya.

Parciális integrálás. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Tétel.

Tfh f, g $[a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatók. Ekkor

1. (Határozatlan alak)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

2. (Határozott alak)

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Parciális integrálás. $\int f'g = fg - \int fg'$

1. *Példa.*

$$\int xe^x dx = ?$$

"Szereposztás":

$$f'(x) = e^x,\ g(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = e^x,\ g'(x) = 1,$$

tehát

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c.$$

1. alapeset

$$\boxed{\int \text{polinom} \cdot e^x dx}$$

$$\int x^2 e^x = ?$$