Integrálszámítás 1. rész

2020. november 16.

Deriválhatóság ekvivalens megfogalmazása

Jelölés: $\Delta f(x) := f(x+h) - f(x)$.

Tétel.

f pontosan akkor differenciálható $x_0 \in \operatorname{int} D_f$-ben, ha $\exists A \in \mathbb{R}$:

$$\Delta f(x_0) = Ah + \varepsilon(h)$$

ahol

- A konstans, h-tól független
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0.$

(Ezt a második tulajdonságot így jelöljük: $\varepsilon(h) = o(h)$)

Differenciál**operátor**

A deriválás egy *hozzárendelés*:

$\dashrightarrow$ egy diff-ható függvényhez hozzárendeli deriváltját.

$$\mathbf{X} := \left\{ f \;\;:\;\; f : I \to \mathbb{R}, \quad f \;\; \text{differenciálható} \right\}$$

$$\mathbf{Y} := \left\{ f \;\;:\;\; f : I \to \mathbb{R} \right\}.$$

Ekkor a deriválás művelete egy operátor

$$D : \mathbf{X} \;\longrightarrow\; \mathbf{Y}, \qquad f \mapsto f'.$$

Primitív függvény

A differenciálás operátor **inverzét** keressük.

Definíció.

$f : I \to \mathbb{R}$, ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum.

$F : I \to \mathbb{R}$ az f függvény PRIMITÍV FÜGGVÉNYE, ha

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I$$

Megjegyzés. Van olyan függvény, melynek *nincs primitív függvénye*.

Primitív függvény

Példa. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Mi a primitív függvénye?

Mivel $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, ezért a primitív függvény

$$F(x) = -\frac{\cos(2x)}{4} \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \frac{2\sin(2x)}{4} = f(x).$$

Másrészt $\sin(x)\cos(x) = \sin(x)\ \sin'(x)$, ezért

$$G(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} \quad \Longrightarrow \quad G'(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2} = f(x)$$

Melyik az igazi? — *Mindkettő.*

Primitív függvény

A primitív függvény – ha létezik – akkor **nem egyértelmű**.

Tétel.

Tfh. $F(x)$ és $G(x)$ két primitív függvénye f-nek, azaz

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Akkor $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + c, \qquad \forall x \in I$$

Bizonyítás. A feltétel szerint

$$(F - G)'(x) = 0, \qquad \forall x \in I$$

Ezért az ismert(!) Tétel alapján $F - G$ konstans.

Határozatlan integrál

Definíció. $f : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei:

HATÁROZATLAN INTEGRÁL Jelölés:

$$\int f(x)dx = \{ H : I \to \mathbb{R} \mid \quad H'(x) = f(x)\} =$$

$$= \{F + c : \quad c \in \mathbb{R} \}.$$

Másik elnevezés: antiderivált.

Példák

1. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

2. $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

3. $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Példák, folytatás

4. $h(x) = x^{-n}$, $n > 1$.

Az általános primitív függvény $H(x) = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

DE $0 \notin D_h$

Így

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c_1 & \text{ha} \quad I \subset \mathbb{R}_+ \\[2ex] \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c_2 & \text{ha} \quad I \subset \mathbb{R}_- \end{cases}$$

Példa

$f(x) = \frac{1}{x}$.

Az általános primitív függvény

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(x) + c & \text{ha } I \subset (0, \infty) \\ \\ \ln(-x) + c & \text{ha } I \subset (-\infty, 0) \end{cases} .$$

Ellenőrzés: $\ln'(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1)$.

Ezt **formálisan** így írjuk:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Határozatlan integrál alaptulajdonságai

1.

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2.

$$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

3.

$$\int f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = f(\varphi(x)) + c.$$

Bizonyítás. Láncszabály: $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Speciális esetek. $\int f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = f(\varphi(x)) + c.$

3/a. Mivel $(f^{\alpha}(x))' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$, ezért

$$\int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \neq -1.$$

1. *Példa.*

$$\int f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

2. *Példa.*

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$\int f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = f(\varphi(x)) + c.$$

3/b.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c. \qquad \text{óvatosan!}$$

3. *Példa.*

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

3/c.

$$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c,$$

4. *Példa.*

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + c$$

Határozatlan integál

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \quad \text{azt jelenti hogy} \quad f(x) = \frac{d}{dx}F(x)}$$

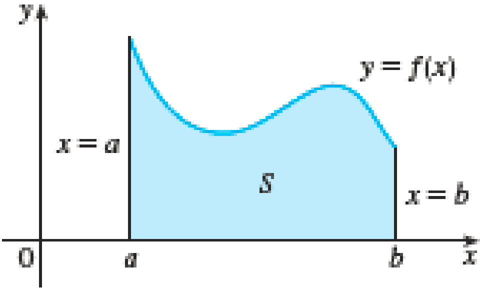
Informálisan azt írjuk, hogy

$$\text{"} f(x)dx = dF(x) \text{"}$$

Területszámítás

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ **korlátos** függvény.

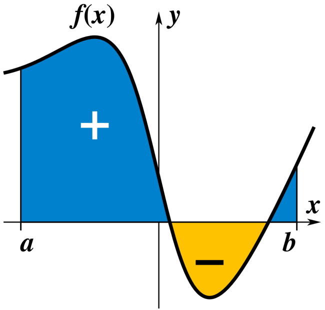
Mennyi a függvény grafikonja és az x tengely közti terület?



Területszámítás

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **korlátos** függvény.

"*Előjeles*" területet fogunk kiszámítani:



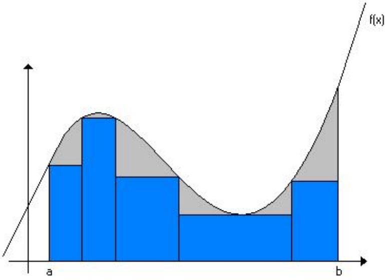
Ezeket a területeket egyelőre közelítjük.

Alsó közelítő összeg

Legyen az $[a, b]$ intervallum egy *felosztása*

$$\mathcal{F} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Definíció. A felosztáshoz tartozó ALSÓ KÖZELÍTŐ ÖSSZEG



$$s(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) =$$

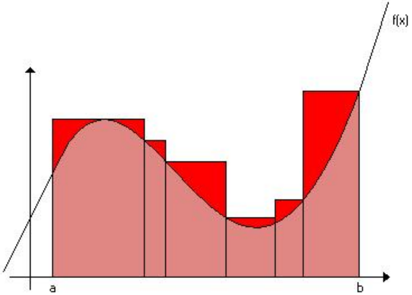
$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k,$$

ahol $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$$m_k = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Felső közelítő összeg

A felosztáshoz tartozó FELSŐ KÖZELÍTŐ ÖSSZEG



$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k,$$

ahol $M_k = \sup\{f(x): \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Közelítő összegek tulajdonságai

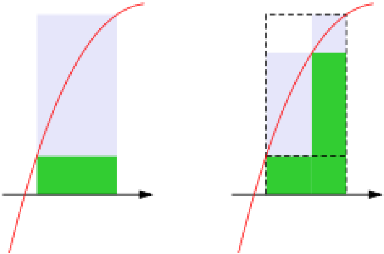
Állítás.

1. $s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F})$.

   Bizonyítás. Triviális.

2. Legyen $\mathcal{F}'$: "$\mathcal{F}$ + egy új osztópont". Ekkor

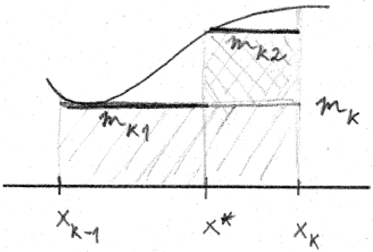
$$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}).$$



$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F})$.

Bizonyítás. Alsó közelítő összegre. (Felső közelítő összegre **HF**.)

Legyen az új osztópont a k-dik intervallumban, $x_{k-1} < x^* < x_k$.



A részintervallumokon a függvény infimumát jelölje m_{k1}, m_{k2}.

Nyilván $m_{ki} \geq m_k$.

Miért?

$$s(\mathcal{F}')-s(\mathcal{F}) = \Big(m_{k1}(x^*-x_{k-1})+m_{k2}(x_k-x^*)\Big)-m_k(x_k-x_{k-1}) =$$

$$= (m_{k1}-m_k)(x^*-x_{k-1})+(m_{k2}-m_k)(x_k-x^*) \geq 0.$$

Közelítő összegek tulajdonságai

Következmény.

$\forall \mathcal{F},\ \mathcal{F}'$ felosztáspárra

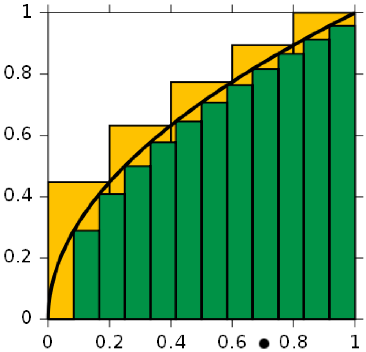
$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}').$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}' \bigcup \mathcal{F}$.

Ekkor az eddigiek szerint

$$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}_0) \leq S(\mathcal{F}_0) \leq S(\mathcal{F}').$$

Riemann integrál



$\mathbb{F}$: Az összes lehetséges felosztás.

Legyenek

$$s = \sup\{s(\mathcal{F}) \ : \ \mathcal{F} \in \mathbb{F}\} \quad \text{és} \quad S = \inf\{S(\mathcal{F}) \ : \ \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

Ekkor $s \leq S$.

Riemann integrál

Definíció.

Ha $s = S$, akkor az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

RIEMANN - INTEGRÁLHATÓ.

A függvény Riemann integrálja

$$\int_a^b f(x)dx = s = S.$$

Megjegyzés. Röviden csak azt mondjuk, hogy f *integrálható*.

Példa

NEM INTEGRÁLHATÓ korlátos függvény. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

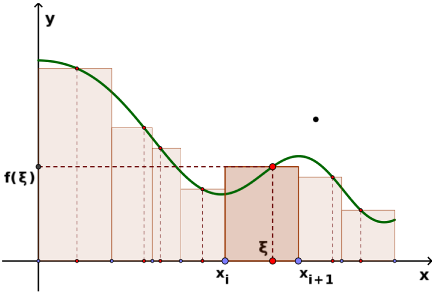
$$f(x) := \begin{cases} 1 \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 \quad \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} .$$

Ekkor $\forall \mathcal{F}$ felosztás esetén

$$s(\mathcal{F}) = 0, \qquad S(\mathcal{F}) = 1 \qquad s \neq S.$$

Riemann összeg

Definíció. Az $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó egyik RIEMANN ÖSSZEG



$$\sigma(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

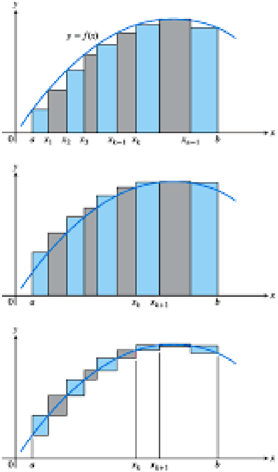
ahol $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges.

$\forall \mathcal{F}$ esetén: $s(\mathcal{F}) \leq \sigma(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F})$.

Oszcillációs összeg

Definíció. Az $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó OSZCILLÁCIÓS ÖSSZEG

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$



$\forall \mathcal{F}$ esetén:

$o(\mathcal{F}) \geq 0.$

Integrálhatóság feltétele

Definíció. $\mathcal{F}$ felosztás FINOMSÁGA

$$\delta(\mathcal{F}) = \max\{x_k - x_{k-1} : \ k = 1, \dots, n\}.$$

Állítás. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos. Ez integrálható $\Longleftrightarrow$

$\exists(\mathcal{F}_n)$ felosztás-sorozat, melyre $\delta(\mathcal{F}_n) \to 0$, és

$$\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{F}_n) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{F}_n), \qquad \text{azaz} \qquad \lim_{n\to\infty} o(\mathcal{F}_n) = 0.$$

Integrálhatóság Riemann feltétele

Tétel. Ha f integrálható, akkor $\forall(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozatra,

melyre $\delta(\mathcal{F}_n) \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Tétel. (Előző T. megfordítása)

Tegyük fel, hogy $\exists(\mathcal{F}_n)$, melyre $\delta(\mathcal{F}_n) \to 0$ és

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \mathcal{I},$$

ahol $\mathcal{I}$ független a ξ_k pontok választásától. *Akkor f integrálható.*

Alap-lemma

Cél: elegendő kritérium az integrálhatósághoz.

Lemma. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Ekkor az integrálhatóság azzal ekvivalens, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \mathcal{F}, \text{ melyre } o(\mathcal{F}) < \varepsilon.$$

1. Kritérium

Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos és monoton, akkor integrálható.

Bizonyítás. Tfh. f monoton növő. $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Az $\mathcal{F}$ felosztás finomsága δ. Ekkor

$$\begin{aligned} o(\mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ &\leq \delta \Big(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}) \Big) \\ &= \delta \cdot (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Ezért ha $\delta < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ akkor $o(\mathcal{F}) < \varepsilon$.

2. Kritérium

Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor integrálható.

Bizonyítás. $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

f folytonos $[a, b]$-n, ezért egyenletesen is folytonos. $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$-hoz $\exists \delta$:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $\mathcal{F}$ olyan felosztás, melyre $\delta(\mathcal{F}) < \delta$.

Ekkor az oszcillációs összeg

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

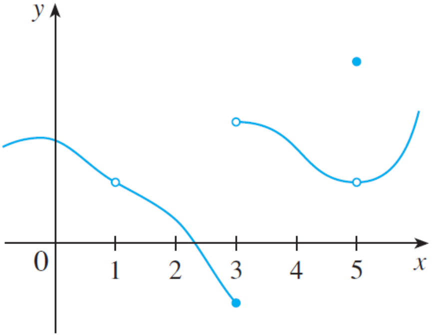
Tehát a függvény integrálható.

3. Kritérium

Tétel. Tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, mely

véges sok szakadási helytől eltekintve folytonos.

Ekkor f integrálható.



3. Kritérium

Bizonyítás. Tfh egy szakadási hely van: x^*. $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$$[a,b] = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [a, x^* - \delta] \cup (x^* - \delta, x^* + \delta) \cup [x^* + \delta, b]$$

I_1 és I_3-ban f folytonos, így:

$$I_1 - ben \qquad \exists \mathcal{F}_1 : \quad o(\mathcal{F}_1) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$I_3 - ban \qquad \exists \mathcal{F}_3 : \quad o(\mathcal{F}_3) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

I_2-n a felosztás: $\mathcal{F}_2 : \ \{x^* - \delta, x^* + \delta\}$. Az oszcillációs összeg:

$$o(\mathcal{F}_2) = (M - m)2\delta \leq (2K)2\delta,$$

ahol $|f(x)| < K$. Ha $\delta < \dfrac{\varepsilon}{12K}$, akkor $o(\mathcal{F}_2) < \varepsilon/3$.

$$o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{F}_1) + o(\mathcal{F}_2) + o(\mathcal{F}_3) < \varepsilon. \surd$$