Differenciálszámítás 5. rész

2020. november 11.

Lagrange-féle középérték tétel. Ism.

Tétel. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és differenciálható (a, b)-n.

Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

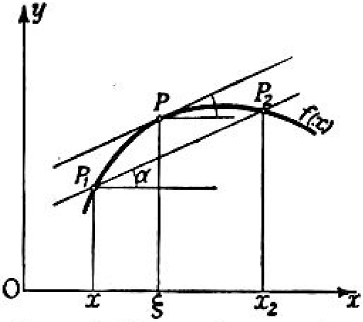


Fig. 14.—To illustrate the mean value theorem

Cauchy-féle középérték tétel. Ism.

Tétel. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosak, és diff-hatóak (a, b)-n.

Tegyük fel, hogy $g(b) \neq g(a)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Megjegyzés. A Lagrange tételből csak annyi következik, hogy

$$\exists \xi_1,\ \xi_2 : \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_1), \quad \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\xi_2)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}.$$

A Cauchy tétel ennél többet állít!

Példák

Láttuk, hogy a $\frac{"0"}{0}$ illetve $\frac{"\infty"}{\infty}$ típusú határérték *bármi* lehet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} = 1.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} = 2.$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x} = "\frac{\infty}{\infty}" = \infty.$$

Eddig *határértékkel számoltunk deriváltat*.

A L'Hopital szabállyal bizonyos esetekben:

deriválttal számolunk határértéket.

L'Hopital szabály

Tétel. f és g differenciálható függvények, melyekre

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad (x_0 = \pm\infty \text{ is lehet }).$$

Ekkor HA létezik $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, AKKOR

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Kiegészítés. A L'Hopital szabály akkor is alkalmazható, ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

L'Hopital szabály bizonyítás.

(*Vázlat*) Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Akkor $f(x_0) = g(x_0) = 0$, és így

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

A Cauchy-féle középértéktétel szerint $\exists \xi$ (x és x_0 között), melyre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Nyilván

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

L'Hopital szabály. További alkalmazások.

- A $\frac{"\infty"}{"\infty"}$ típusú határértékre is igaz a L'Hopital-szabály.
- Ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$, akkor a L'Hopital szabályt *újra* alkalmazzuk:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots .$$

- Egyéb kritikus határértékek:

$$0 \cdot \infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty - \infty \qquad \ldots$$

L'Hopital szabály. Példák.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1.$$
2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$$
3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$
4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(x)}{1}=-1$$
5. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

L'Hopital szabály. Óvatosság!

Figyeljünk a feltételekre:

1. Csak kritikus hányados határértékre használható. Általában:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{csak ha } \frac{"\infty"}{"\infty"} \text{ vagy } \frac{"0"}{"0"}$$

2. *Példa.*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)} = \frac{"\infty"}{"\infty"} = ?$$

L'H szabály: $$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)} = \nexists!!!$$

A kiinduló határérték létezik: $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)} = 1$

Lineáris közelítés, ismétlés

Az f függvény gráfján adott egy $(x_0, f(x_0))$ pont.

Ebben a pontban a görbe érintője, ... melynek meredeksége $f'(x_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ha x *"közel van"* x_0-hoz, akkor

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ez a függvény lineáris közelítése az adott pontban.

Elsőrendű Taylor polinom

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható. $x_0 \in \operatorname{int}(D)$.

Az f függvény x_0-hoz tartozó ELSŐFOKÚ TAYLOR-POLINOMJA

$$T_1^{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Megjegyzés. Jelölés: $T_1^{x_0}(x)$ helyett egyszerűen $T_1(x)$

Állítás.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1^{x_0}(x)}{x - x_0} = 0.$$

Elsőrendű Taylor polinom, hiba

Tétel. $f : D \to \mathbb{R}$, kétszer differenciálható, $x_0 \in \mathrm{int}(D_f)$

Ekkor $\forall x$-hez $\exists \xi$ az x és az x_0 között, melyre

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Definíció. Az $f(x) - T_1(x)$ különbség elnevezése

Lagrange-féle maradéktag.

Példa

$f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$.

$$T_1(x) = \sin(0) + \cos(0) \cdot x = x.$$

Legyen $x_1 = 0.1$. Így $\sin(0.1) \approx T_1(0.1)$.

Mennyi a hiba?

$$\sin(0.1) - T_1(0.1) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{-\sin(\xi)}{2}(0.1)^2$$

Tehát $|\sin(0.1) - T_1(0.1)| \leq \frac{1}{200}$. $\implies$ $\sin(0.1) \approx 0.1 \pm \frac{1}{200}$

n-ed rendű közelítés

Egy n-ed fokú polinomot keresünk, mely *olyan, mint f* x_0-ban:

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

(Azután a folytatás: $P_n^{(n+1)} \equiv 0$ lenne.)

Állítás. $\exists! P_n(x)$ polinom ezzel a tulajdonsággal.

Bizonyítás. Az egyértelműség triviális. HF A létezés: konstrukció.

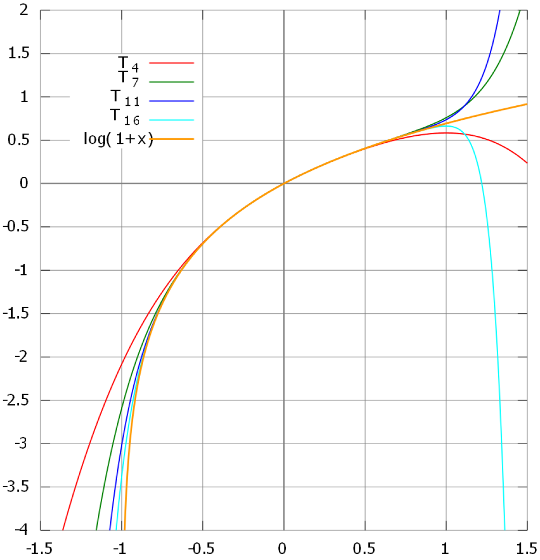
Taylor polinom

Definíció. Tfh f n-szer diffható x_0 egy környezetében.

Az f függvény x_0-hoz tartozó *n-ed rendű Taylor polinomja*:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \\ &\quad \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

Taylor polinom, $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$



Taylor polinom

Bizonyítás. (Folytatás) Létezés:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$T_n(x)$ és deriváltjai x_0-ban:

$$T_n(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) + ... \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_0 - x_0)^n = f(x_0)$$

$$T_n'(x_0) = f'(x_0)1 + \frac{f''(x_0)}{2}2(x_0 - x_0) + ... \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x_0 - x_0)^{n-1} =$$

$$= f'(x_0).$$

$$T_n^{(k)}(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k! + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x_0 - x_0)^{n-k} = f^{(k)}(x_0)$$

Taylor polinom, hibabacslés

Definíció. A Lagrange-féle maradéktag:

$$L_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

Tétel. Tfh. f $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy környezetében.

Ekkor $\exists \xi$ x és x_0 között ($\xi \in (x, x_0)$ vagy $\xi \in (x_0, x)$) melyre:

$$L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

Példa. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. $e^{0,1} \approx ?$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Mivel $f'(x) = f^{(n)}(x) = e^x$, ezért $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$.

Harmadrendű Taylor polinom az $x_0 = 0$ körül:

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

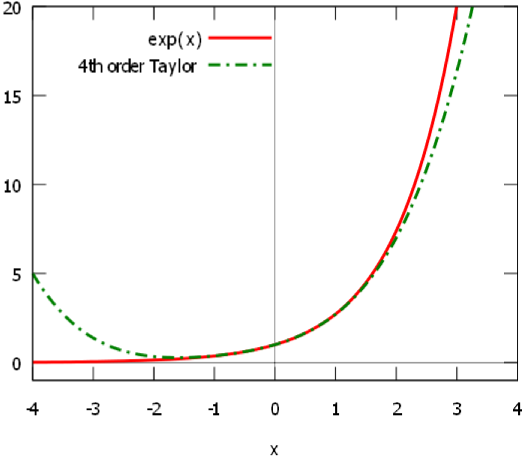
Így a becslés

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6}.$$

A hiba nagyságrendje: $f(0,1) - T_3(0,1) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$, $0 < \xi < 0,1$

$$|e^{0.1} - T_3(0.1)| \leq \frac{e^{0.1}}{24}10^{-4} \leq \frac{3}{24}10^{-4}.$$

Példa. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. $e^{0,1} \approx ?$



Implicit függvény deriválása

Valós függvény megadására két lehetőség van:

1. EXPLICIT ALAK. $x \mapsto y = f(x)$. Pl.

$$y = \sin(x), \qquad y = \ln(x), \qquad (x^3+2)^{1/2} \ldots$$

Eddig csak ezekkel foglalkoztunk.

2. IMPLICIT ALAK. $x \leftrightarrow y$ összefüggés adott. Pl.

$$(x-1)\cos(y) = 1, \quad 0 \leq y < \pi$$

Ennek deriválása *közvetlenül*:

$$\cos(y) + (x-1)(-\sin(y))y' = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{\cos(y)}{(x-1)\sin(y)} = \frac{1}{x-1}\operatorname{ctg}(y) \quad \surd$$

A derivált számolható, és pl. érintő egyenes meghatározható.

Kereshetünk lok. szélsőértéket, stb... *az explicit alak nélkül is.*

Változás

A személyes gyakorlatok átalakulásával az óra eleji *röpzh* helyett *röp-Moodle teszt* lesz.

- Két *igaz/hamis* kérdés a megelőző két előadásból,
- egymás után: 1-1 pont
- "óra":15 - "óra":19 között lesz nyitva a teszt.
- A röp-Moodle teszt max időtartama 3 perc.