# Differenciálszámítás 5. rész

2020. november 11.

# Lokális maximum és minimum

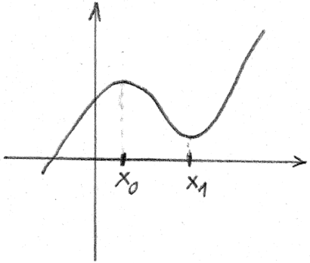
Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $x_0 \in \operatorname{int} D$.

$x_0$-ban *lokális maximum* (ill. *lokális minimum* ) van,

ha $\exists U \subset D$ környezete $x_0$-nak:

$\forall x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$,

(ill. $f(x) \geq f(x_0)$.)

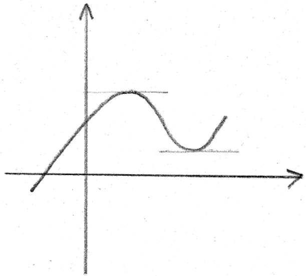


Tétel. (Lokális szélsőérték, szükséges feltétel)

Tfh. $f : D \to \mathbb{R}$ függvénynek $x_0$-ban *lokális szélsőértéke van*.

Ha $f$ differenciálható,

akkor $f'(x_0) = 0$.



*Szemléletesen:* lokális szélsőérték helynél az érintő vízszintes.

Definíció. Ha $f'(x_0) = 0$, akkor $x_0$ STACIONÁRIUS PONTJA $f$-nek.

# Szükséges feltétel, megfordítás?

A tétel megfordítása nem igaz.

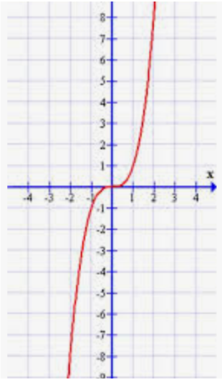
Ha az $f$ differenciálható fv-re $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ esetén,

$\not\Rightarrow$ $x_0$ lokális szélsőérték. (persze *lehet*, hogy az...)

*Példa.* $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, és így

$$f'(0) = 0.$$

Mégis $x_0 = 0$ nem lokális szélsőérték.



# Monotonítás és derivált

**Tétel.**

$f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor

$\underline{f \text{ monoton növő}} \iff f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$

$\underline{f \text{ monoton csökkenő}} \iff f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in I.$

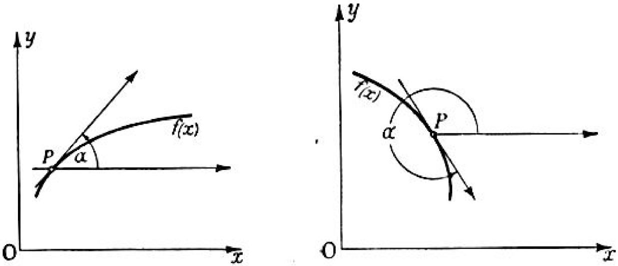



Fig. 8.—Tangents to graphs of increasing and decreasing functions

# Monotonítás és derivált

**Bizonyítás.** Legyen $f$ monoton növő.

A differenciahányados előjelét nézzük, $x_0 \in \operatorname{int} D_f$:

– ha $x < x_0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(\leq 0)}{(< 0)} \geq 0$$

– ha $x > x_0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(\geq 0)}{(> 0)} \geq 0$$

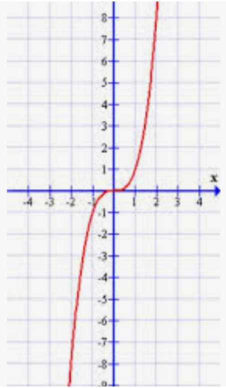
A határérték $f'(x_0) \geq 0$

# Monotonítás és derivált

Következmény.

Ha $f'(x)>0 \quad \forall x \in (a,b) \implies f$ **szigorúan monoton** növő.

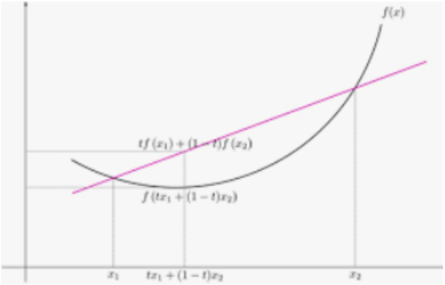
Megfordítva nem igaz. Pl. $f(x) = x^3$.

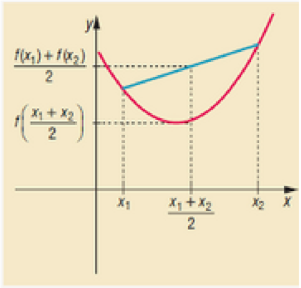


# Konvex függvény

Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ KONVEX, ha $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$ esetén

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \qquad t \in [0,1].$$



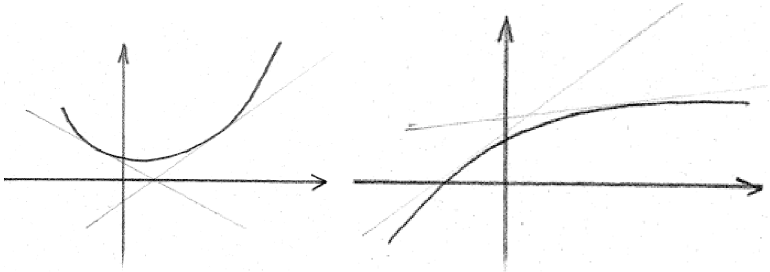

Definíció. Az $f$ KONKÁV, ha $-f$ konvex. ("lefelé konvex")

# Konvex – Konkáv

Szemléletesen, ha a függvėny differenciálható:

– ha a függvény $\forall$ pontban az *érintő fölött* van, akkor konvex,

– ha minden pontban az *érintő alatt* van, akkor konkáv.



# Inflexió

Definíció. Az $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ INFLEXIÓS PONT, ha itt a függvény

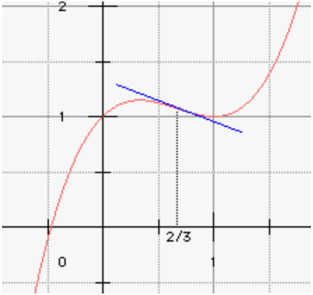
– *konvexből konkávba*,

– vagy *konkávból konvexbe* vált át.

*Szemléletesen:*

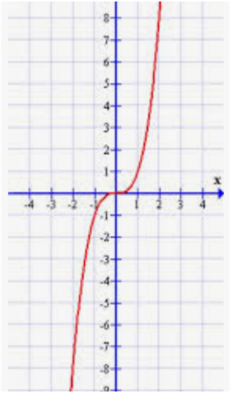
inflexiós pontban az érintője "átdöfi"

a függvény grafikonját.



*Példa.* $f(x) = x^3$

Ekkor az $x = 0$-ban az érintő meredeksége 0, $\Longrightarrow$ átdöfi a gráfot.




$x \geq 0$ esetén *konvex*,

$x \leq 0$ esetén *konkáv*.

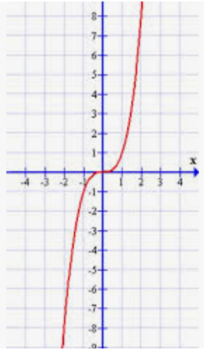
Az $x = 0$ pontban *inflexiója* van.

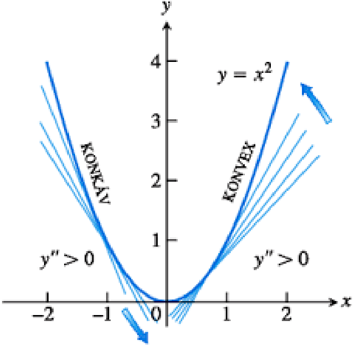
# Konvexitás és derivált

**Tétel.** $f : I \to \mathbb{R}$ diff-ható függvény, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor

– $f$ konvex $I$-n $\iff$ $f'$ monoton növő,

– $f$ konkáv $I$-n $\iff$ $f'$ monoton csökkenő.



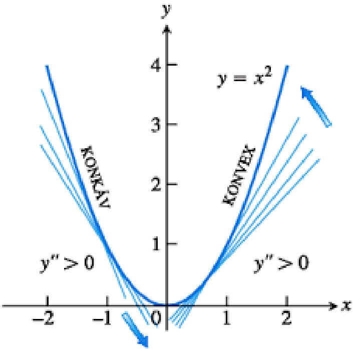



Az $f(x) = x^3$ függvény és deriváltja (átskálázva).

# Következmény

**Tétel.** Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ *kétszer differenciálható* függvény, $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Ekkor

1. $f$ konvex $I$-n $\iff f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
2. $f$ konkáv $I$-n $\iff f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.



# Lokális szélsőérték, elégséges feltétel

Tétel. $f$ kétszer differenciálható.

Tegyük fel, hogy $f'(x_0) = 0$ (stacionárius pont), akkor:

1. ha $f''(x_0) > 0$, akkor $x_0$ **lokális minimum**,
2. ha $f''(x_0) < 0$, akkor $x_0$ **lokális maximum**,
3. ha $f''(x_0) = 0$, akkor így **nem eldönthető**, vajon van-e szélsőérték.

$f'(x_0) \neq 0$ esetén mit mondhatunk?

# Lokális szélsőérték, elégséges feltétel

**Bizonyítás.** 1. Tegyük fel, hogy $f''(x_0) > 0$.

Ekkor $\exists U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezet, ahol $f''(x) > 0$ $\forall x \in U$.

Ezért $f'(x)$ *szigorúan monoton nő* $U$-ban. Mivel $f'(x_0) = 0$, ezért

$x < x_0$ esetén $f'(x) < 0$, $f$ szigorúan monoton fogy.

$x > x_0$ esetén $f'(x) > 0$, ezért $f$ itt szigorúan monoton növekszik.

| | $x < x_0$ | $x_0$ | $x > x_0$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | lok. minimum | $\nearrow$ |

# Konvex – konkáv

Tétel.

Ha $f''(x_0) > 0$, akkor $f$ konvex $x_0$ *valamely környezetében*.

Ha $f''(x_0) < 0$, akkor $f$ konkáv $x_0$ *valamely környezetében*.

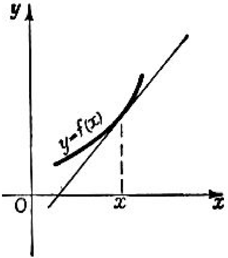



Fig. 9a.— $f''(x) > 0$

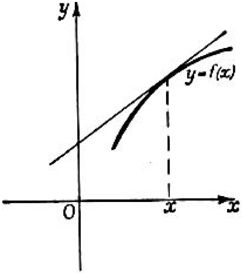



Fig. 9b.— $f''(x) < 0$

Vajon miért?

# Konvex – konkáv

Következmény.

Ha $x_0$-ban inflexiós pont van, akkor $f''(x_0) = 0$.

Adjunk példát arra, hogy $f''(x_0) = 0$, de nem inflexió.

Állítás.

Ha $f''(x_0) = 0$ és $f''$ előjelet vált $x_0$-ban, akkor $x_0$ inflexiós pont.

Ha $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$ akkor $x_0$ inflexiós pont.

# Példa

Legyen $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Ekkor $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

$f''(x)$ előjele:

$x < 0$ esetén $+$ *(konvex)*

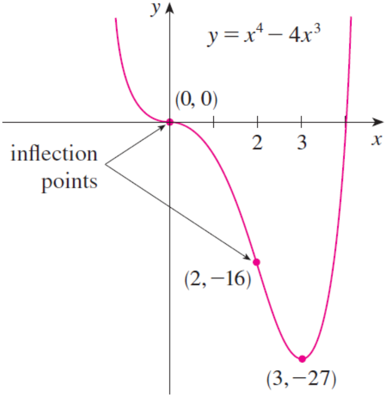
$x = 0$ esetén $0$

$x \in (0,2)$ esetén $-$*(konkáv)*

$x = 2$ esetén $0$

$x > 2$ esetén $+$ *(konvex)*

Inflexiós pontok: $0$ és $2$.

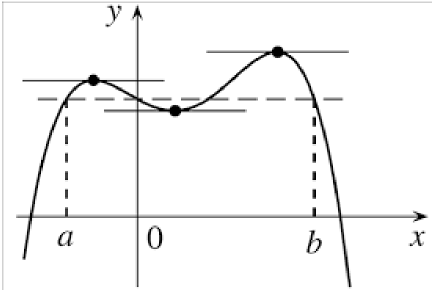


# Rolle tétel

Tétel. (Rolle tétel) Adott $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos.

Tegyük fel, hogy $f$ differenciálható $(a, b)$-n, és $f(a) = f(b)$.

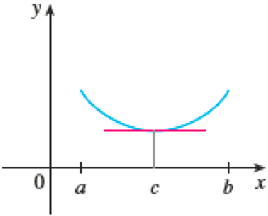
Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre $f'(\xi) = 0$.



**Bizonyítás.** Mivel $f$ folytonos $[a, b]$-n, ezért Weierstrass **II.** tétele

miatt $\exists M$ maximum, és $\exists m$ minumum.

1. Ha $M = m = f(a) = f(b)$, akkor a függvény konstans. $\surd$.
2. Ha $M \neq m$ akkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre $m = f(\xi)$ vagy $M = f(\xi)$.



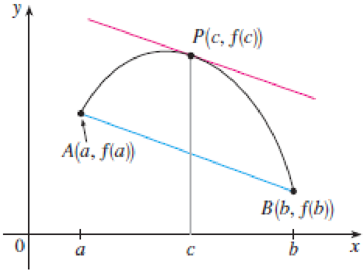

Akkor $\xi$ *lokális szélsőérték*, ezért $f'(\xi) = 0$ .

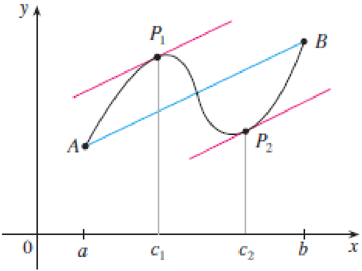
# Lagrange-féle középérték tétel

**Tétel.** Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és differenciálható $(a, b)$-n.

Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



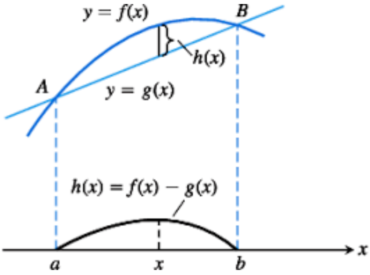
# Bizonyítás

Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes egyenlete

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Lineáris függvény, meredeksége

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$




Legyen $h(x) := f(x) - g(x)$. Ekkor $h$ differenciálható, és

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0, \qquad h(b) = f(b) - g(b) = 0.$$

A Rolle tétel miatt $\exists \xi$, melyre $h'(\xi) = 0$.

$$f'(\xi) = g'(\xi) + h'(\xi) = g'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

# Lagrange-féle középérték tétel. Következmény

Tétel. (Az integrálszámítás 1. alaptétele)

Adott $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $I$ intervallum.

Tegyük fel, hogy $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$ esetén.

Ekkor $f(x) \equiv c$ valamilyen $c$-re.

*Megjegyzés.* Konstans fügvény deriváltja 0. Ez trivi.

A fenti állítás ennek "megfordítása".

# Következmény bizonyítása

Legyenek $x_1 < x_2 \in I$ tetszőlegesek.

Ekkor $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0.$$

Ezért $f(x_2) = f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in I$. Tehát $f$ konstans.

# Cauchy-féle középérték tétel

Tétel. Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosak, és

differenciálhatóak $(a, b)$-n. Tegyük fel, hogy $g(b) \neq g(a)$.

Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

A Tételt nem bizonyítjuk.

*Megjegyzés.* Speciális esetként $g(x) = x$ választással a Lagrange tételt kapjuk.