Differenciálszámítás 3. rész

2020. november 4.

Derivált

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathrm{int} D$.

A függvény DIFFERENCIÁLHATÓ x_0-ban, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

A derivált egy ekvivalens definíciója:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

Az érintő egyenes

Az f függvény gráfján adott az $(x_0, f(x_0))$ pont.

Ebben a pontban a görbe érintője, melynek meredeksége $f'(x_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ezért, ha x "*közel van*" x_0-hoz, akkor

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ez a függvény lineáris közelítése az adott pontban.

Lineáris közelítés

$f(x) = \sqrt{x+3}$. Lineáris közelítés $x_0 = 1$-ben:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

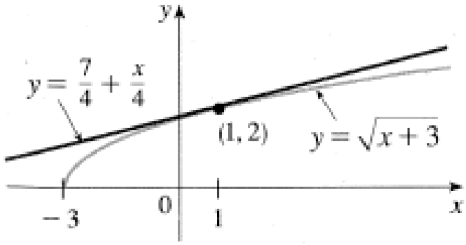
A derivált

$$\left(\sqrt{x+3}\right)' = \left((x+3)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

Mivel $f(1) = 2$, és $f'(1) = 1/4$, így az érintő egyenlete

tessék leírni! $\quad y = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}.$

Lineáris közelítés, $f(x) = \sqrt{x+3}$ és $x_0 = 1$



A lineáris közelítés:

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}.$$

Így például

$$\sqrt{3.98} = ??? = \frac{7}{4} + \frac{0.98}{4} = 1.995.$$

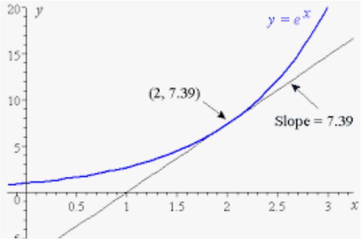
$f(x) = e^x$

Definíció szerint

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \underbrace{=}_{GYak\text{-}n} e^{x_0} \cdot 1.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$(e^x)' = e^x.$$



Lépjünk tovább. $f(x) = a^x$, $a > 0$ tetszőleges.

Ekkor $a = e^{\ln a}$, ezért $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$.

Ennek deriváltja $\frac{d}{dx}\left(e^{x \ln a}\right) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$

Inverz függvény derivált

Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ szigorúan növő, folytonos.

Ekkor $\forall c \in R_f$ -hez $\exists! \xi \in D$, melyre $f(\xi) = c$. Ez a $c \mapsto \xi$

leképezés az **inverz függvény**. $f^{-1} : R_f \to D_f$.

Tétel. Tfh f differenciálható is, továbbá $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in D_f$.

Ekkor f^{-1} is differenciálható, és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Inverz függvény deriváltja

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Ekvivalens felírása, ha $y = f(x)$ és $x = f^{-1}(y)$:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Vajon szemléletesen ezt hogy látjuk?

Bizonyítás. (Vázlat) Azonosság: $f^{-1}(f(x)) = x$.

Deriváljuk x szerint (lánc szabály):

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1,$$

Innen a tétel állítása következik.

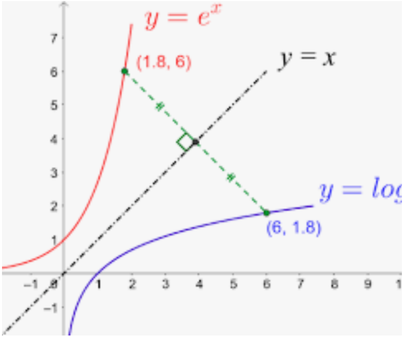
Példa $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

Ha $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \nearrow$ ezért létezik az inverze:

$$(e^x)^{-1} = \log_e x =: \ln x.$$

$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

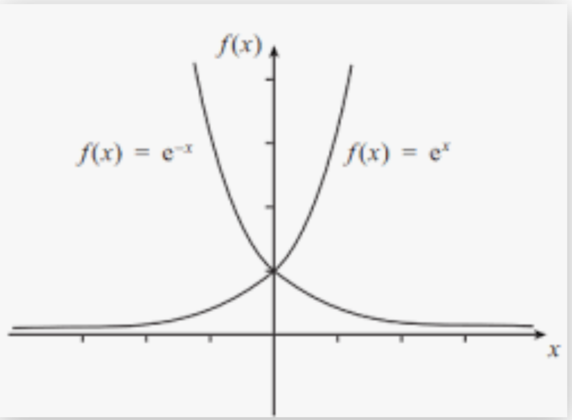


Az $\ln x$ függvény deriváltja

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Exponenciális függvény

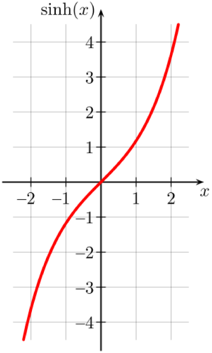
Az **exponenciális** függvények: e^x és e^{-x} ÉT: $x \in \mathbb{R}$.



RAJZ füzetbe:

sh (x)

A SINUS HIPERBOLIKUS függvény: $\operatorname{sh}(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}.$



Ennek tulajdonságai:

1. szigorúan monoton növő,
2. az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett,
3. páratlan függvény.

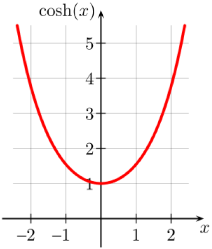
Deriváltja:

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-1)(e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$\mathrm{ch}\,(x)$

Definíció. A cosinus hiperbolikus függvény:

$$\mathrm{ch}\,(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Ennek tulajdonságai:

1. az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett,
2. páros függvény.

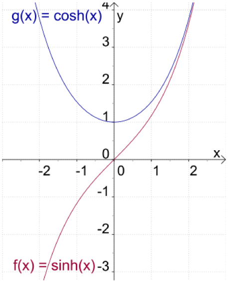
Deriváltja:

$$\mathrm{ch}\,'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,(x).$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ és } \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ezek a függvények emlékeztetnek a trigonometrikus függvényekre:

$$\mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x), \qquad \mathrm{ch}\,'(x) = \mathrm{sh}\,(x).$$



Állítás. (Pithagorasz egyenlőség megfelelője)

$$\mathrm{ch}\,^2(x) - \mathrm{sh}\,^2(x) = 1, \quad \forall x\text{–re.}$$

Bizonyítás. A definíciók alapján:

$$\mathrm{sh}\,^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}, \qquad \mathrm{ch}\,^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}. \qquad \surd$$

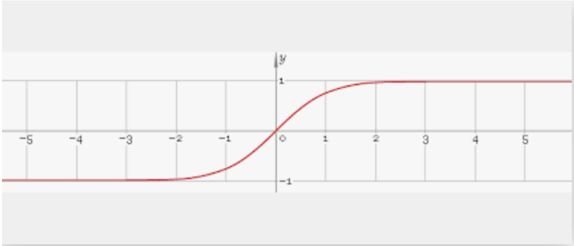
$\tanh(x)$

Definíció. A tangens hiperbolikus függvényt így definiáljuk:

$$\tanh(x) := \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

ÉT $D_{\tanh} = \mathbb{R}$. ÉK $R_{\tanh} = (-1, 1)$.

Bizonyítás. HF.



$f(x) = \sin(x)$ inverz, derivált

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin'(x) = \cos(x)$. Az inverz deriváltja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = (*)$$

Ha $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, akkor $\cos(x) = \pm\sqrt{\ldots}\ ?? = +\sqrt{1 - \sin^2(x)}$.

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$f(x) = \cos(x)$ inverz, derivált

$f^{-1}(x) = \arccos(x)$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\cos'(x) = -\sin(x)$. Az inverz deriváltja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = (**)$$

Ha $x \in [0, \pi]$, akkor $\sin(x) = \pm\sqrt{\dots}\ ?? = +\sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

$$(**) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\operatorname{tg}(x)$ és $\operatorname{ctg}(x)$ inverzek, deriváltak

$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ismétlés: $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$. Ezért az inverz deriváltja

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Hasonlóan $\operatorname{arc\,ctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

Ismétlés: $\operatorname{ctg}'(x) = -1 - \operatorname{ctg}^2(x)$, ezért az inverzre

$$\operatorname{arc\,ctg}'(x) = \frac{1}{-1 - \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arc\,ctg}(x))} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

Második derivált

Definíció. Ha f' *deriválható* x_0-ban, akkor ennek deriváltja

f MÁSODIK DERIVÁLTJA:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

További jelölés:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Harmadik (...) derivált

Hasonlóan, ha f'' deriválható, akkor a HARMADIK DERIVÁLT

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \frac{d^3 f}{dx^3}.$$

További elnevezés HARMADRENDŰ DERIVÁLT.

...és így tovább. Az n-ED RENDŰ DERIVÁLTAT így jelöljük:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Példa. $(e^x)^{(n)} = e^x \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Példa

$f(x) = \dfrac{1}{x}$. Mi ennek n-dik deriváltja?

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
f'(x) &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= (-2)(-1)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot x^{-(n+1)} \\
&= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\ln^{(n)}(x) = ?$

Lokális maximum és minimum

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $x_0 \in D$.

x_0-ban LOKÁLIS MAXIMUM van, ha $\exists U \subset D$ környezete x_0-nak,

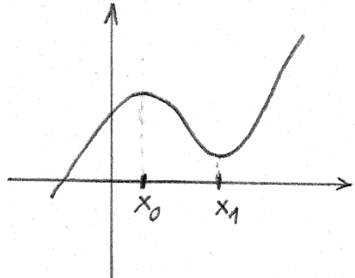
melyre: $\forall x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$.

x_0-ban LOKÁLIS MINIMUM van, ha $\exists U \subset D$ környezete x_0-nak,

melyre: $\forall x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x_0)$.

A lokális maximum és lokális minimum közös neve:

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK.

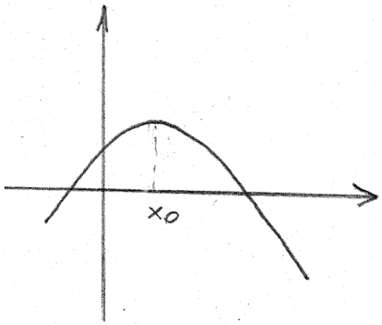


Globális szélsőérték

Definíció.

x_0 GLOBÁLIS MAXIMUM, ha $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(x) \leq f(x_0).$$

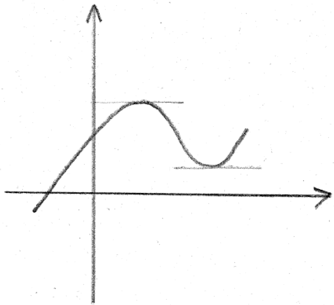


Lokális szélsőérték, szükséges feltétel

Tétel. $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható, $x_0 \in \mathrm{int}(D_f)$.

Tfh f-nek x_0-ban *lokális szélsőértéke van*. Akkor

$$f'(x_0) = 0$$



Szemléletesen:

lokális szélsőértéknél

az érintő vízszintes.

Szükséges feltétel, bizonyítás

Tegyük fel, hogy x_0-ban *lokális maximum* van.

Ekkor $\exists \delta > 0$:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Így $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(\leq 0)}{(< 0)}$,

$\Longrightarrow \quad f'(x_0) \geq 0.$

Hasonlóan, ha $x_0 < x < x_0 + \delta$, akkor $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{(\leq 0)}{(> 0)}$,

$\Longrightarrow \quad f'(x_0) \leq 0.$

Valóban $f'(x_0) = 0.$