Differenciálszámítás 2. rész

2020. október 21.

Derivált

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in \operatorname{int} D$.

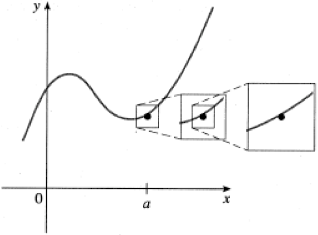
A függvény DIFFERENCIÁLHATÓ x_0-ban, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

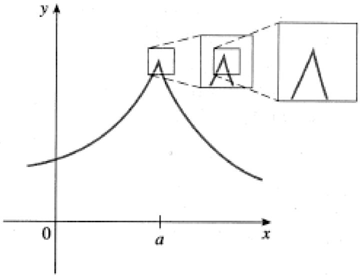
A derivált egy ekvivalens definíciója:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

Deriválhatóság, szemléletesen



sima



nem sima

Alkalmazási területek:

- Függvény görbe adott pontjához húzott érintő meredekség.
- Pillanatnyi sebesség
- Stb....

Hatványfüggvények

$\boxed{f(x) \equiv c}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

$\boxed{f(x) = x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

$\boxed{f(x) = x^n,\ n > 1}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = n x_0^{n-1}, \qquad \text{ezt már láttuk.}$$

Állítás. (Hatványfüggvény deriváltja. Általános eset)

Az $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R}$ függvény deriváltja:

$$(x^p)' = p x^{p-1}.$$

Hatványfüggvény, példák.

Példa. Ha $f(x) = x^{\pi}$, akkor $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

Példa. Ha $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, akkor

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Példa. Ha $f(x) = \sqrt{x}$, akkor

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Trigonometrikus függvények

$$\boxed{f(x) = \sin(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \cos(x_0)$$

$$\boxed{f(x) = \cos(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = -\sin(x_0)$$

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x), \qquad \cos'(x) = -\sin(x)}$$

Tétel. Ha f differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos.

Bizonyítás. Ha $x \neq x_0$, akkor

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Határértéket véve

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0.$$

Így

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Kérdés: "Visszafele" igaz-e? Vajon *folytonos* $\overset{?}{\Longrightarrow}$ *differenciálható*

Nem. Ellenpélda?

Differenciál**operátor**

A deriválás egy *hozzárendelés*:

$\dashrightarrow$ egy függvényhez hozzárendeli derivált-függvényét.

$$\mathbf{X} := \Big\{ f \mid f : D \to \mathbb{R}, \quad f \ \text{ differenciálható} \Big\}$$

$$\mathbf{Y} := \Big\{ f \mid f : D \to \mathbb{R} \Big\}.$$

Ekkor a differenciálás művelete egy operátor

$$\mathrm{Diff} : \mathbf{X} \ \longrightarrow \ \mathbf{Y} \qquad\qquad f \mapsto f'.$$

Linearitás

Tétel. Tfh $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények.

A differenciáloperátor lineáris, azaz

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x) \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. A határérték lineáris. $\surd$

Példa. $\big(\sin(x) + 3\cos(x) + 12x^8\big)' = \dots$

Szorzat-szabály

Tétel. Tfh $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ekkor

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)}_{f(x_0)g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

Szorzat-szabály, példa

$f(x) = x^2 \sin(x)$. $f'(x) = ?$

$$\begin{aligned}\big(x^2\sin(x)\big)' &= \big(x^2\big)'\cdot\sin(x) + x^2\big(\sin(x)\big)' = \\ &= 2x\sin(x) + x^2\cos(x).\end{aligned}$$

Reciprok-szabály

Tétel. g diff-ható függvény, melyre $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D_g$. Ekkor

$$\frac{1}{g} \text{ is diffható, és} \qquad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} -\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

Reciprok-szabály, példa

$f(x) = \frac{1}{x^2}$. $f'(x) = ?$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Itt $g(x) = x^2$, ezért $g'(x) = 2x$. Behelyettesítve:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}.$$

Ismerős? $\left(x^{-2}\right)' = ?$

Hányados-szabály

Tétel. f és g diff-ható függvények, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D_g$. Ekkor

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bizonyítás. A szorzat és reciprok szabály egyszerre.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = \dots$$

Hányados-szabály. Példa

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$$f(x) = \mathrm{tg}\,(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x), \qquad (\sin(x))' = \cos(x).$$

A hányadosfüggvény derivált:

$$\mathrm{tg}\,'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \underbrace{\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}}_{1+\mathrm{tg}\,^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Hányados-szabály. Példák HF

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = ?$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = ?$$

$$\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = ?$$

$$\left(\frac{x^2}{1+\cos(x)}\right)' = ?$$

Láncszabály

Tétel. Összetett függvény deriválása.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

Példa. $(\cos(2x))' = -\sin(2x) \cdot 2.$

Megjegyzés. Klasszikus Leibniz-féle jelöléssel:

Ha $y = f(u)$ és $u = g(x)$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Láncszabály bizonyítás

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{\lim_{g(x) \to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{f'(g(x_0))} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} . \checkmark$$

Láncszabály. Példa

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

$y = F(x) = \left(x^3 - 1\right)^{100}$. Derivált?

A belső függvény $g(x) = x^3 - 1$ és külső függvény: $f(x) = x^{100}$.

Így

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right)^{100} = 100\left(x^3 - 1\right)^{99} \frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right) =$$

$$= 100\left(x^3 - 1\right)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2\left(x^3 - 1\right)^{99}.$$