Függvények 5.
Differenciálszámítás bevezető

2020. október 19.

Definíció.

Tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ szigorúan növő, folytonos függvény.

Ekkor $\forall c \in [f(a), f(b)]$ számhoz $\exists! \xi \in [a, b]$, melyre $f(\xi) = c$. (Bolzano tétel.)

Ez a $c \mapsto \xi$ leképezés az INVERZ FÜGGVÉNY.

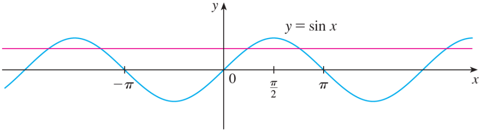
$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

Állítás. A fent definiált inverz függvény is szigorúan növő és folytonos.

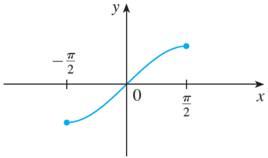
Megjegyzés. Ha f szig. monoton *fogyó*, az állítás hasonló.

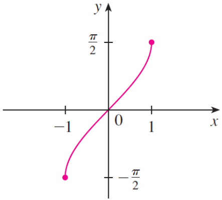
Trigonometrikus függvények inverzei. $f(x) = \sin(x)$.

Van-e inverze?



Megszorítását tekintjük. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Itt sin $\nearrow$.





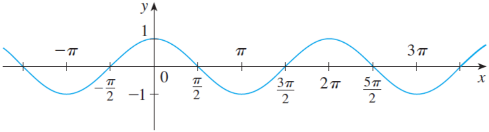
$\sin^{-1}$:

$[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Jelölés: $\arcsin(x)$

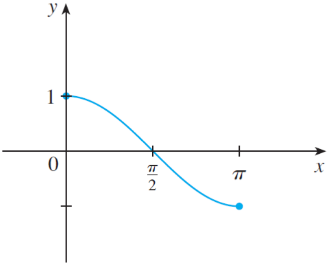
Például: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = ?$ $\arcsin(-1) = ?$

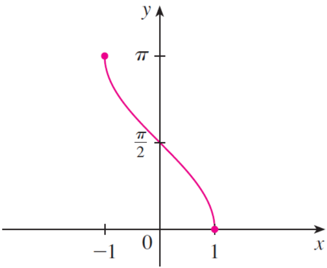
$f(x) = \cos(x)$ inverze.



A cos függvény megszorítása kell.

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Itt $\cos(x)$ $\searrow$ szigorúan monoton.

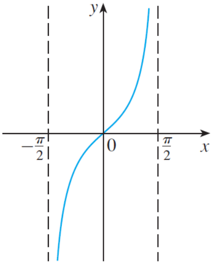




Jelölés: $\arccos(x)$.

$$\begin{aligned}
\arccos(\cos(x)) &= x, \qquad 0 \le x \le \pi \\
\cos(\arccos(x)) &= x, \qquad -1 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

$f(x) = \operatorname{tg}(x)$ inverze.



A $\operatorname{tg}(x)$ függvény 1-1 értelmű, ha a

$$(-\pi/2, \pi/2)$$

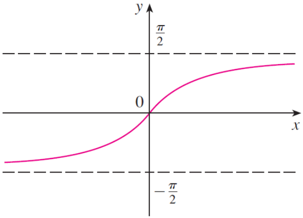
intervallumra megszorítjuk.

Ekkor $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$.

A $\operatorname{tg}(x)$ inverze

$$\operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Jelölés: $\operatorname{arctg}(x)$.

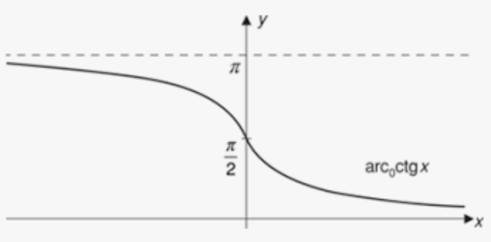


$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$f(x) = \mathrm{ctg}\,(x)$ inverze.

Hasonlóan értelmezhető a $\mathrm{ctg}\,(x)$ függvény inverze.

$\mathrm{ctg}\; : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ megszorítással $\mathrm{arc\,ctg}\; : \mathbb{R} \to (0, \pi)$



$\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{arc\,ctg}\,(x) = ?$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{arc\,ctg}\,(x) = ?$

Határérték. Általános definíció.

Adott $f : D \to \mathbb{R}$ függvény.

Feltesszük, hogy x_0-nak $\exists H$ környezete, melyre

$$\forall x \in H,\ x \neq x_0 \implies x \in D_f, \qquad \text{esetleg } x_0 \notin D$$

Definíció. Az f függvény HATÁRÉRTÉKE x_0-BAN α, ha

α-nak $\forall U$ környezetéhez $\exists V$ környezete x_0-nak, melyre

$$x \in D \cap V,\ x \neq x_0 \qquad \implies \qquad f(x) \in U.$$

Határérték és folytonosság

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

1. f folytonos $x_0 \in (a, b)$-ben $\iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. f folytonos a-ban $\iff \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
3. f folytonos b-ben $\iff \lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Példa. DIRICHLET függvény. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Ez a függvény sehol sem folytonos.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = ? \qquad (\infty^0 \text{ típus})$$

Legyen $[x] = n$. Ekkor

$$x^{\frac{1}{x}} \geq n^{\frac{1}{x}} > \sqrt[n+1]{n}, \quad \text{és} \quad x^{\frac{1}{x}} < (n+1)^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt[n]{n+1}.$$

Határértéket véve:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n} \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$$

A két szélen *sorozat* határértéke van, ezeket ismerjük:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Így $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

Mi más lehet a ∞^0 típus értéke?

Hasonlóan, ismert sorozat-határérték alapján igazolhatók:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. ($1^\infty$ típus.)
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$. ($1^\infty$ típus.)
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$. ($1^\infty$ típus.)

Mindezek mintájára:

1. Vajon $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = ?$
2. Vajon $\lim\limits_{x\to 0} x^x = ?$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =?$ ahol $x_0 \in \mathbb{R}$. $\quad (\frac{0}{0}$ típus$)$

Egyszerűsíthetünk $x \neq x_0$ esetén: $\dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$. Így

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0.$$

Kis módosítás. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =?$ ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Egyszerűsíthetünk $x \neq x_0$ esetén:

$\dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x^{n-k}x_0^{k-1} \cdots + x_0^{n-1}$. Így

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1}.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = ? \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ típus}\right)$$

Trigonometrikus azonosság, újra:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).$$

Ezt felhasználva:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2 \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \underbrace{=}_{t=\frac{x-x_0}{2}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \cos(x_0) = \cos(x_0).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ?$$

Külön kell számolni az egyoldali határértékeket!

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t =$$

$$= \ln\left(\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\right) = \ln e = 1.$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to -\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to -\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \ldots = 1.$$

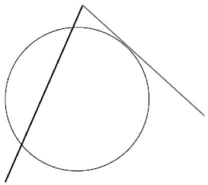
Végső eredmény:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

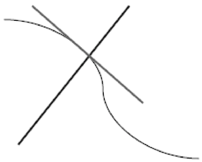
Előkészítés. Érintő egyenes

Görbe érintőjének értelmezése? Az érintő érinti az alakzatot.

Kör esetén: az az egyenes, ami **pontosan egy pontban** metszi:



Komplikáltabb görbe esetén: nem jó.



Szelő és érintő

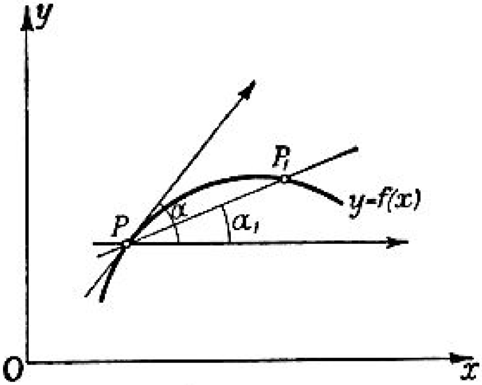


Fig. 7.—Chord and Tangent

Érintő:

szelők "határértéke",

ha $P_1 \longrightarrow P$

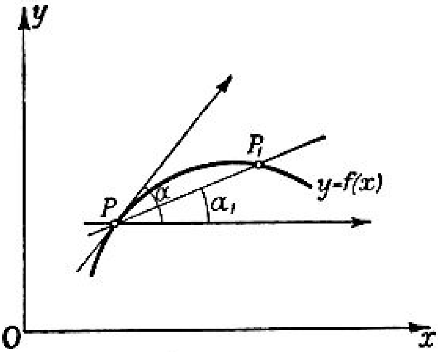


Fig. 7.—Chord and Tangent

Két ponton átmenő szelő meredeksége ($\equiv$ iránytangense):

$$m(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Definíció. Az f függvény $P = (x_0, y_0)$ ponthoz tartozó ÉRINTŐje olyan egyenes, ami

– átmegy a ponton,

– meredeksége $m = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$

Példa

Feladat: Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola $P(1,1)$ pontjához húzott érintő egyenes egyenletét. (RAJZ.)

Megoldás: $x_0 = 1$, $f(x) = x^2$.

A meredekség:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ponton átmenő $m = 2$ meredekségű egyenes:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{azaz} \quad y = 2x - 1$$

Derivált

Definíció.

$f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D_f$, **belső pont**. Az x ponthoz tartozó

DIFFERENCIAHÁNYADOS

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad x \in D_f, \quad x \neq x_0.$$

A függvény DIFFERENCIÁLHATÓ x_0-BAN, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Elnevezés: DERIVÁLT, DIFFERENCIÁLHÁNYADOS. Jele:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

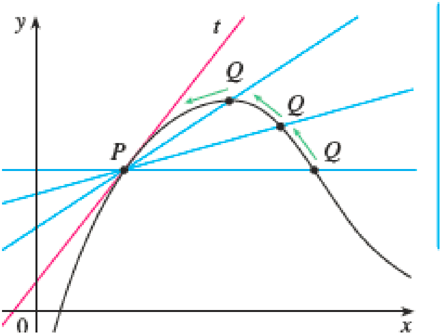
Derivált

Jelölje $h = x - x_0$.

Ekkor $x \to x_0$ egyenértékű azzal $x - x_0 = h \to 0$.

Így a derivált egy ekvivalens definíciója:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Példa

$$f(x) = x^2, \qquad x_0 \in \mathbb{R}.$$

A definíció szerint

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ez a folyamat, amit végigszámoltunk a függvény differenciálása – vagy deriválása.

Konkrét meghatározása később következik.

Pillanatnyi sebesség

Görbe mentén mozgó pont t idő alatt $s = f(t)$ utat tesz meg.

A $[t_0,\ t_0 + h]$ időintervallumban az átlagsebesség

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Egyre kisebb h, sőt $h \to 0$ esetén: *pillanatnyi sebesség*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Ez a derivált (egyik) fizikai jelentése. Szokás még a $\dot{f}(t)$ jelölés is.

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in \operatorname{int} D$. A függvény

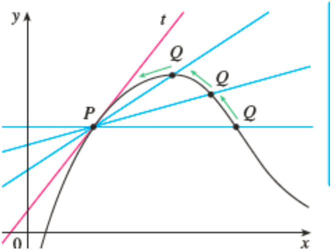
DIFFERENCIÁLHATÓ x_0-ban, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Elnevezés DERIVÁLT, DIFFERENCIÁLHÁNYADOS.

A derivált egy ekvivalens definíciója:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$



Egyoldali deriváltak

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in \operatorname{int} D$. A JOBBOLDALI DERIVÁLT:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ha a fenti határérték létezik és véges.

A BALOLDALI DERIVÁLT:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Állítás.

f differenciálható x_0-ban $\iff$ $\exists f'_+(x_0)$ és $\exists f'_-(x_0)$, és

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Példa. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Mivel $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, ezért **nem deriválható** az $x_0 = 0$ pontban.

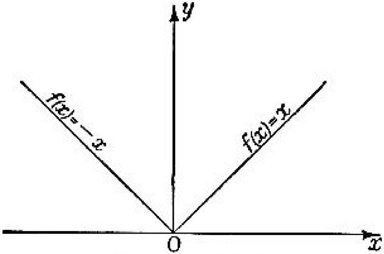
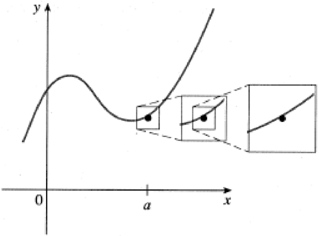
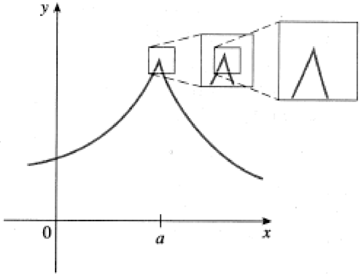


Fig. 9. $f(x) = |x|$

Deriválhatóság, szemléletesen

A függvény differenciálható, ill. *nem differenciálható*





sima *nem sima*