# Függvények. 4. rész

2020. október 12.

# Határérték. Ismétlés.

Adott $f : D \to \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$.

Feltesszük, hogy $\exists U = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezet, melyre

$$(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \subset D, \qquad \text{esetleg} \quad x_0 \notin D_f$$

Definíció. Az $f$ függvény HATÁRÉRTÉKE $x_0$-BAN $\alpha$, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ és } \ x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Következmény. Tfh $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$ belső pont. Ekkor

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

# Monoton függvény határértéke

**Állítás.** $f : X \to Y$. Tfh $\exists U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$x_1 < x_2 \;\in U \setminus \{x_0\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \le f(x_2).$$

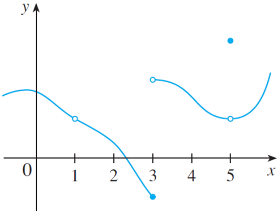
(Itt $f \nearrow$) Ekkor léteznek $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Ezek a határértékek:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : \; x_0 - \varepsilon < x < x_0\},$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf\{f(x) : \; x_0 < x < x_0 + \varepsilon\}.$$

SŐT...



**Állítás.** (A határérték monotonitása.)

1. Tegyük fel, hogy

$$f(x) \ \le \ g(x) \qquad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ \le \ \lim_{x \to x_0} g(x).$$

2. Tegyük fel, hogy

$$f(x) < g(x) \qquad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x).$$

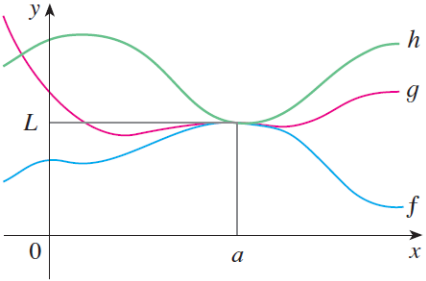
# Rendőrelv függvényekre

Adottak $f, \ g, \ h, \ : D \to \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x) \ \leq \ g(x) \ \leq \ h(x), \qquad x \in U, \ x \neq x_0.$$

Feltesszük továbbá, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

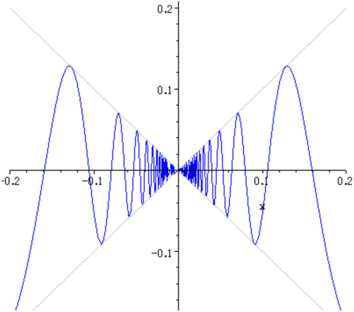



Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

# Rendőrelv függvényekre. Példa.

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$




Látjuk, hogy

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|,$$

ha $x \neq 0$.

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} |x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$, így $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

# Kompozíció határértéke

Állítás. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha, \qquad \lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta,$$

ahol $\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$

Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \beta.$$

**Bizonyítás.** Átviteli elv segítségével. (HF)

*Megjegyzés.* A fenti képletben szereplő konstansok értéke akár $\pm\infty$ is lehet.

# Kompozíció határértéke, példa

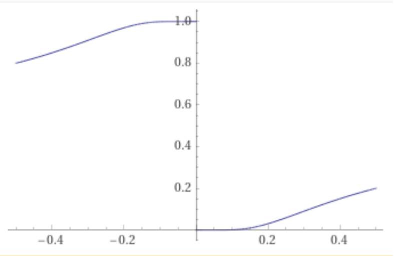
$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A *jobboldali* határérték 0-ban:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

A *baloldali* határérték 0-ban:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0. \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1$$



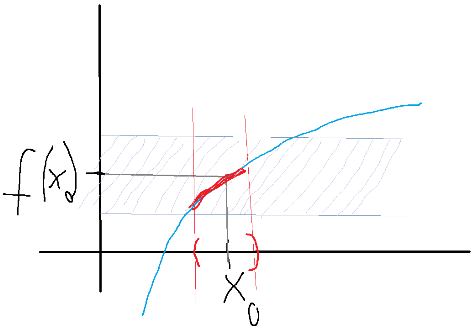

Tehát a $\lim_{x \to 0} f(x)$ nem létezik.

## Állítás.

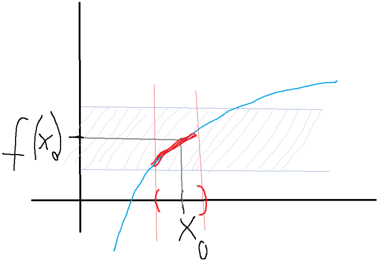
Tegyük fel, hogy $f$ folytonos $x_0$-ban és $f(x_0) > 0$.

Ekkor $\exists U$ környezete $x_0$-nak, melyre

$$f(x) > 0, \qquad \forall x \in U \cap D_f.$$



**Bizonyítás.**




Legyen $0 < \varepsilon < f(x_0)$. A folytonosság miatt $\exists \delta > 0$:

$$|x - x_0| < \delta, \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ezen $x$ pontokra tehát

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon > 0.$$

# Folytonos függvény

Definíció.

$f$ FOLYTONOS $D_f$-EN, ha $\forall x_0 \in D_f$-re folytonos $x_0$-ban.

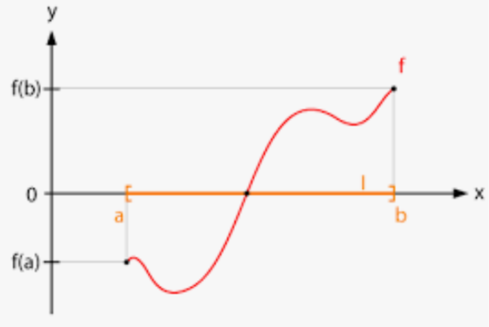
A folytonosság definíciójában szereplő $\delta$-ra

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

# Bolzano tétel

**Tétel.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tfh $f(a) < 0 < f(b)$.

Ekkor$\exists \xi \in (a, b)$, melyre $f(\xi) = 0$.




Új betű: $\xi$ *KSZI*

# Bolzano tétel, bizonyítás

Konstruktív bizonyítás. Legyen $a_1 = a,\ b_1 = b.$

*1. lépes.*

Legyen $\xi_1 := \dfrac{a+b}{2}$.

- Ha $f(\xi_1) = 0$, akkor $\surd$.
- Ha $f(\xi_1) > 0$, akkor

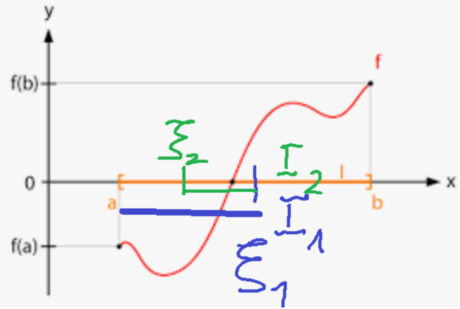
$$a_2 := a_1, \qquad b_2 := \xi_1.$$

- Ha $f(\xi_1) < 0$, akkor legyen

$$a_2 := \xi_1, \qquad b_2 := b_1.$$

Ekkor $f(a_2) < 0$ , $f(b_2) > 0$ és $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, fele hosszúságú.

*2. lépés.* $[a_3, b_3]$ konstrukciója: $f(a_3) < 0$ és $f(b_3) > 0$, stb.




Ekkor két eset lehetséges:

– Vagy véges sok lépésben vége van az iterációnak, $\xi\surd$

– Vagy "nincs vége"

Ha "nincs vége", ekkor két sorozat lett:

$$(a_n): \quad f(a_n) < 0 \qquad (b_n): \quad f(b_n) > 0.$$

Másrészt $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots$, továbbá $b_n - a_n \to 0$.

A Cantor-féle közöspont-tétel: $\exists! \xi$, $\xi \in (a, b)$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

A *folytonosság* miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \leq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \geq 0.$$

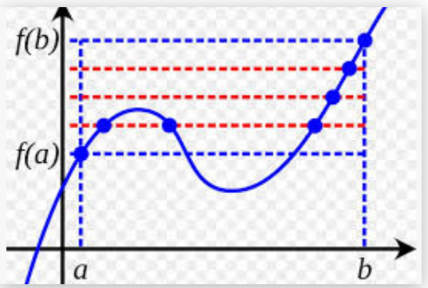
Ezért

$$f(\xi) = 0.$$

# Bolzano tétel, általános eset

**Tétel.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tfh $f(a) < f(b)$.

Ekkor $\forall c \in [f(a), f(b)]$-hez $\exists \xi \in (a, b)$, melyre $f(\xi) = c$.




**Következmény.** Páratlan fokú polinomnak biztosan van gyöke.

# Weierstrass I. tétel

$f : D_f \to \mathbb{R}$ Folytonos.

Fontos speciális eset: $D_f = [a, b]$. Korlátos és zárt ($\equiv$ kompakt).

Tétel. (Weierstrass I. tétele)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. **Ekkor** $f$ **korlátos**.

# Weierstrass I. tétel, bizonyítás

Indirekt. Tegyük fel, hogy *felülről nem korlátos*:

Ekkor $\forall n$-hez $\exists x_n \in [a, b]$: melyre $f(x_n) > n$.

Mivel $a \leq x_n \leq b$, $\Longrightarrow$ $(x_n)$ korlátos.

Tehát $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata (B-W tétel):

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = x_0.$$

$[a, b]$ zárt $\Longrightarrow$ $x_0 \in [a, b]$. Itt $f$ folytonos (sorozatfolytonos is):

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

A konstrukció szerint $f(x_{n_k}) > n_k$, ezért

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty.$$

Ez *ellentmondás*.

# Weierstrass II. tétel

Tétel. (Weierstrass II. tétele)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor $f$ *felveszi infimumát és supremumát* $[a, b]$-n.

Ez azt jelenti, hogy $\exists \xi_1$ és $\exists \xi_2$:

$$f(\xi_1) = \max\{f(x),\ x \in [a, b]\},$$

$$f(\xi_2) = \min\{f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

# Weierstrass II. tétel, bizonyítás

A maximum létezését igazoljuk.

$$H := \{f(x) : x \in [a, b]\} = R_f.$$

Weierstrass I. tétel alapján

$$\beta := \sup(H) < \infty.$$

Ekkor $\forall n$-re $\exists x_n$:

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta.$$

Mivel $a \leq x_n \leq b \quad \Longrightarrow \quad (x_n)$ korlátos.

Az $(x_n)$ sorozat korlátos.

Tehát $\exists(x_{n_k})$ *konvergens* részsorozata (B-W tétel):

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \xi_1.$$

$[a,b]$ zárt $\quad\Longrightarrow\quad \xi_1 \in [a,b]$. Itt $f$ folytonos (sorozatfolytonos is):

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi_1).$$

De tudjuk, hogy

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \le \beta, \quad\Longrightarrow\quad \beta = f(\xi_1) \quad\Longrightarrow\quad \beta \in H.$$

Ezért valóban $\beta = \max(H)$.

A minimum létezését hasonlóan igazolhatjuk.

# Folytonos függvény

## Definíció.

$f$ FOLYTONOS $D_f$-EN ha $\forall x_0 \in D_f$-re folytonos $x_0$-ban.

A folytonosság definíciójában szereplő $\delta$-ra

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0).$$

Létezik-e olyan függvény, mely "közös" $\delta$-val rendelkezik, azaz

$\delta = \delta(\varepsilon)$ minden $x_0$ pontban?

# Példa

*Válasz*: **Igen**.

$f(x) = x^2 + 1$, ennek megszorítását nézzük $D_f = [1, 2]$-re

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 + 1 - x_0^2 - 1\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq$$

$$\leq |x - x_0| \cdot 4,$$

u.i. $|x + x_0| \leq 4$ $\forall x, x_0 \in [1, 2]$.

Ezért $\delta = \varepsilon/4$ választás $\forall x_0$-ra jó.

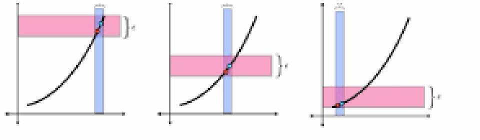
# Egyenletes folytonosság

**Definíció.**

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény EGYENLETESEN FOLYTONOS $D_f$-EN,

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, melyre

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$



**Következmény.**

Ha $f$ egyenletes folytonos $D_f$-en, akkor $\forall x_0 \in D_f$-ben folytonos.

# 1. Példa

$f(x) = x^2 + 1$, $D_f = [0, +\infty)$.

Belátjuk, hogy NEM egyenletesen folytonos.

Legyen $\varepsilon = 2$. Belátjuk, hogy erre $\forall\delta$ "rossz".

Valóban, ha $\dfrac{1}{n} < \delta$, akkor válasszuk: $x_1 := n$, $x_2 := n + \dfrac{1}{n}$.

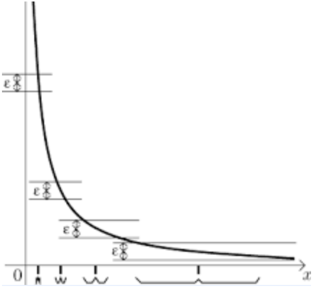
Bár $|x_1 - x_2| < \delta$, mégis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| n^2 + 1 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 \right| =$$

$$= \left| n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2} \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 = \varepsilon.$$

# 2. Példa

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1).$$



Ha $x_1 = \dfrac{1}{n}$, $x_2 = \dfrac{1}{n+1}$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1$.

Az alappontok távolsága tetszőlegesen kicsi lehet

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} < \delta.$$

Ezért az $\varepsilon = 1$-hez nincs "jó" $\delta$.

# Folytonosság és egyenletes folytonosság

$f : D_f \to \mathbb{R}$ folytonos.

Fontos speciális eset: $D_f = [a, b]$. Korlátos és zárt ($\equiv$ kompakt).

Tétel. (Heine tétel)

Ha az $f : [a, \; b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás Indirekt.

Tfh, hogy $\exists\varepsilon > 0$ melyre $\forall\delta > 0$ rossz, például $\delta = \dfrac{1}{n}$ sem jó.

(Részletek a jegyzetben...)