Függvények. 3. rész

2020. október 7.

Határérték. Ismétlés.

Adott $f : D \to \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$.

Feltesszük, hogy $\exists U = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezet, melyre

$$(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \subset D, \qquad \text{esetleg} \;\; x_0 \notin D_f$$

Definíció. Az f függvény HATÁRÉRTÉKE x_0-BAN α, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre

$$0 < |x - x_0| < \delta \;\; \text{és} \;\; x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

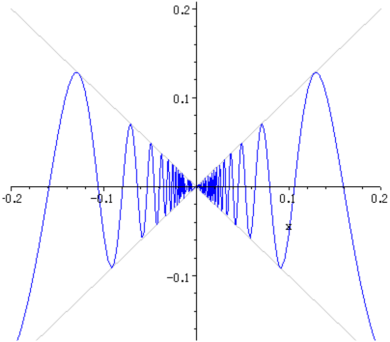
Következmény. Tfh $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$ belső pont. Ekkor

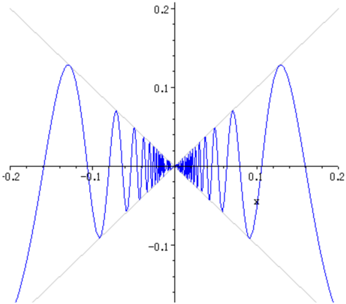
$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Legyen

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = ?$





"Látjuk", hogy a határérték 0-ban 0. Ha $x \neq 0$,

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1, \qquad \Longrightarrow \qquad \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|.$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\delta = \varepsilon$:

$$|x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|x\sin\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Valóban $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

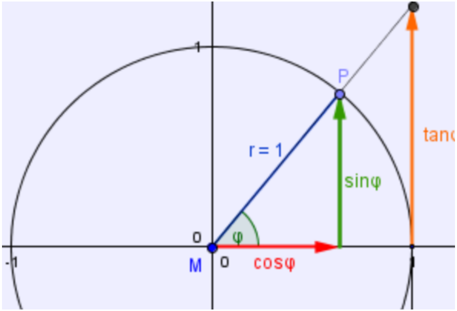
Példa

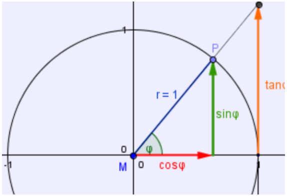
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} =? \quad \text{Tipp?}$$

Elegendő a $0 < x < \pi/2$ intervallumot tekinteni, hisz f páros. Itt





Az ábráról is leolvashatók $0 < x < \pi/2$ esetén:

$$\sin(x) < x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

$$\mathrm{tg}\,(x) > x. \qquad \text{Így} \;\; \frac{\sin(x)}{\cos(x)} > x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).$$

Tehát

$$\cos x < \frac{\sin(x)}{x} < 1,$$

Határértéket véve

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

A határérték fogalom kiterjesztése

Eddig ezt definiáltuk:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \qquad \surd$$

ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ voltak.

A határtérték-fogalmat *kiterjesztjük* arra az esetre, amikor

$$x_0 = \infty$$

és/vagy

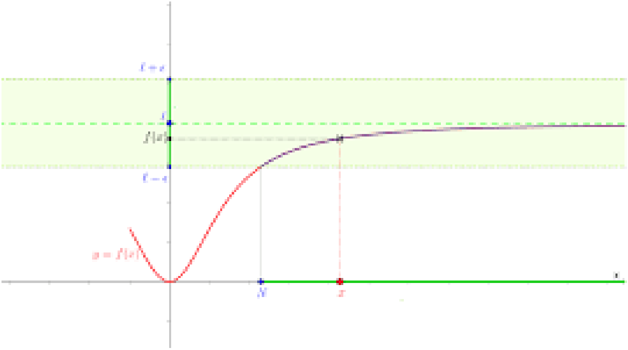
$$\alpha = \infty$$

Megjegyzés. A definíciók $-\infty$ esetre könnyen átfogalmazhatók.

A határérték, $x_0 = +\infty$

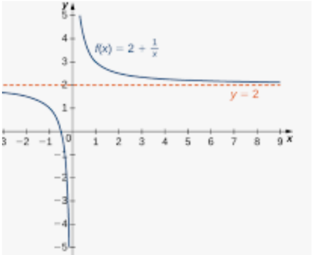
Definíció. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists K \in \mathbb{R}$, melyre

$$x > K \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$



Példa: *"végtelenben a határérték véges "*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}, \; x \neq 0$$



Belátjuk hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Így

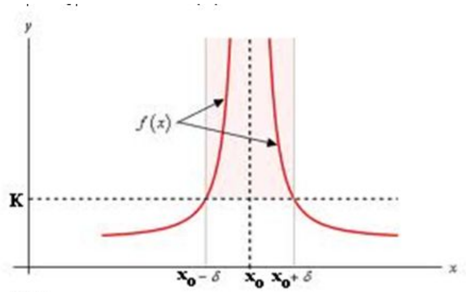
$$\left(\frac{1}{x} < \varepsilon \iff\right) \quad x > \frac{1}{\varepsilon} \iff |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Tehát $K = \frac{1}{\varepsilon\surd}$

A határérték, $\alpha = +\infty$

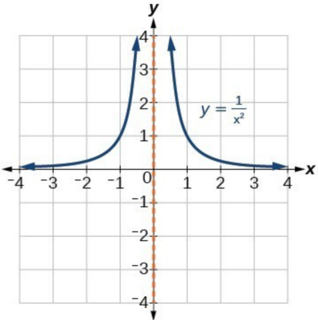
Definíció. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists \delta > 0$, melyre

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > K$$



Példa: *"véges pontban a határérték végtelen "*

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0$$



Belátjuk, hogy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Legyen $K > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\frac{1}{x^2} > K \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

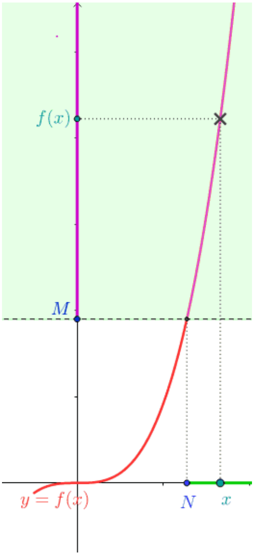
Tehát $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$ jó választás.

A határérték, $\alpha = +\infty$, $x_0 = +\infty$

Definíció. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$,

ha $\forall M \in \mathbb{R}$-hez $\exists N \in \mathbb{R}$:

$$\forall x > N \implies f(x) > M$$



Példa: *"végtelenben a határérték végtelen "*

Legyen

$$f(x) = x^2, \qquad D_f = \mathbb{R}.$$

Belátjuk, hogy

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty.$$

Valóban, legyen $M \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

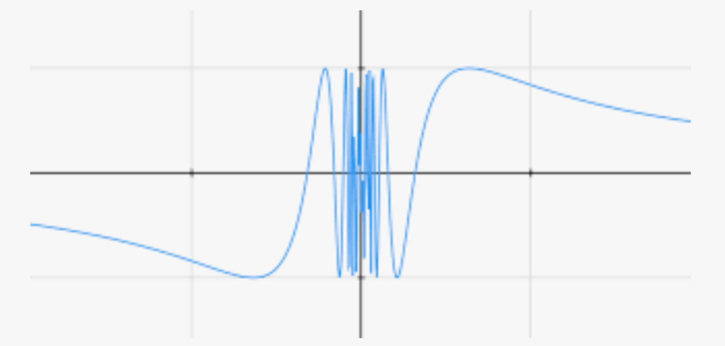
$$x^2 > M \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \sqrt{M}.$$

Tehát $N = \sqrt{M}$ jó választás.

RAJZ HF!

Példa

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad D_f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Látható, hogy a 0-ban nincs határértéke.

Ennek precíz – és könnyű – bizonyítása: átviteli elv alapján lesz.

Átviteli elv

Átviteli elv $\approx$ "sorozatok mentén vett határérték"

Állítás. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor, ha $\forall (x_n)$ sorozatra, melyre

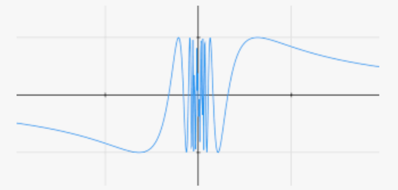
- $(x_n) \subset D_f$,
- $x_n \neq x_0$,
- $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha.$$

Példa, alkalmazás

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$



Tekintünk két sorozatot:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad \frac{1}{y_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Mindkét sorozat 0-hoz tart:

$$x_n \to 0, \qquad y_n \to 0.$$

A *fügvényértékek* sorozata:

$$f(x_n) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$$

$$f(y_n) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1.$$

Átviteli elv, jobboldali határértékre

Állítás. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \alpha \iff$ ha $\forall (x_n)$ sorozatra, melyre

- $(x_n) \subset D_f$,
- $x_n > x_0$,
- $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha.$$

Átviteli elv, baloldali határértékre

Állítás. $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \alpha \iff$ ha $\forall (x_n)$ sorozatra, melyre

- $(x_n) \subset D_f$,
- $x_n < x_0$,
- $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha.$$

Megjegyzés. Az átviteli elvek átfogalmazhatók arra az esetre is, amikor $x_0 = \pm\infty$ és/vagy $\alpha = \pm\infty$.

Példa

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Meghatározzuk a

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

határértéket az **átviteli elv** alkalmazásával.

Legyen (x_n) egy sorozat, melyre $x_n \neq 1$, és $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Ekkor a sorozat mentén $f(x_n) = x_n + 1$, így a határérték:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (x_n + 1) = 2.$$