Valós számok bevezetése

2020. szeptember 7.

Absztrakció!

A természetes számok halmaza: $\mathbb{N}$

A számfogalom felépítésének első lépése: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A $\mathbb{N}$ halmaznak két fontos alaptulajdonsága a következő:

1. Van legkisebb elem, ez 1 (egység).
2. Mindegyik elem után van közvetlenül következő: $n \to n + 1$

Megjegyzés. Más könyvekben esetleg első elem $n = 0$. $\lightning$

Teljes indukció

Teljes indukciós bizonyítási elv. Legyen A_n valamilyen állítás **minden** n természetes számra. Ha

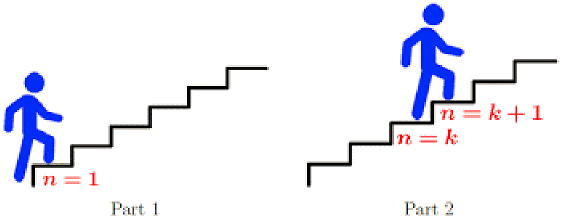
1. A_1 teljesül, és
2. A_{k+1} mindig igaz A_k teljesülése esetén,

akkor a fenti A_n tulajdonság teljesül <u>minden</u> n-re.

Például: "Minden n természetes szám érdekes."

Próbáljuk igazolni!

1. *Megjegyzés.* A teljes indukciót úgy képzelhetjük el, mintha fel kellene mennünk egy végtelen hosszú lépcsőn.



Mi a magyarázata a képeknek?

2. *Megjegyzés.* A teljes indukció esetleg nem 1-gyel kezdődik, hanem ahonnan a képletek érvényesek.

Teljes indukció, példa

Példa. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bizonyítás:

A teljes indukció első lépése. $n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen n helyére 1-t behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Állítás: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A teljes indukció második lépése. Tegyük fel, hogy valamely rögzített $n = k$-ra teljesül az állítás (ez az indukciós feltevés). Nézzük meg, mennyi $k+1$ négyzetszám összege:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (*).$$

Folytathatjuk:

$$(*) = \frac{(k+1)}{6}\left(k(2k+1) + 6k + 6\right) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \surd \quad \text{Miért?}$$

A természetes számok halmazának bővítése

A számfogalom felépítésének első lépése volt: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Egyik művelet: *összeadás.* $13 + 134 = \surd$

$13 + ? = 11$ megoldásához:

$\longrightarrow$ egész számok: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Másik művelet: *szorzás.* $13 \cdot (-134) = \surd$

$13 \cdot ? = 11$ megoldásához:

$\longrightarrow$ racionális számok: $\mathbb{Q} = \{r = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Hogyan tovább?

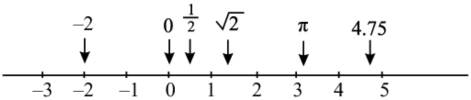
$\longrightarrow$ AXIOMATIKUS BEVEZETÉS

Axiómák=*alaptulajdonságok*

Adott egy $\mathbb{R}$ halmaz, melynek elemeit VALÓS SZÁMOKnak nevezzük.

Adott két *kitüntetett eleme*, ezek: 0 és 1 ($0 \neq 1$).

$\mathbb{R} \equiv$ számegyenes pontjai



Adott $\mathbb{R}$-en két művelet, az összeadás ($+$) és a szorzás ($\cdot$), valamint egy $\leq$ rendezési reláció.

Ezek tulajdonságait AXIÓMÁKBAN adjuk meg.

Axiómák 1. csoportja: a műveletek alaptulajdonságai.

Jelölések.

$\forall$ = MINDEN, $\exists$ = LÉTEZIK

$\exists!$ = EGYÉRTELMŰEN LÉTEZIK

1. Az összeadás *asszociatív*, azaz $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$-hez $\exists u \in \mathbb{R}$, melyre $x + u = 0$. Ez az x szám ellentettje.

4. Az összeadás *kommutatív*, azaz $x + y = y + x$.
5. A szorzás *asszociatív*, azaz $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
6. $x \cdot 1 = x$
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$-hoz $\exists u \in \mathbb{R}$, melyre $x \cdot u = 1$.
   Ez az *x szám reciproka*.
8. A szorzás *kommutatív*, azaz $x \cdot y = y \cdot x$.
9. A szorzás disztrubutív az összeadásra, azaz

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Megjegyzés. A szorzás művelete: $x \cdot y = xy$.

Axiómák, 2. csoport: a rendezési reláció tulajdonságai.

10. $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$ (a rendezési reláció reflexív).

11. $\forall x \neq y$ esetén az $x \leq y$ és $y \leq x$ közül pontosan egy igaz.

12. Ha $x \leq y$ és $y \leq z \Longrightarrow x \leq y$ (a rendezési reláció *tranzitív*).

13. Ha $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$

14. Ha $x \leq y$ és $0 \leq z \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$.

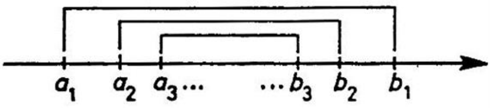
Axiómák, 3. csoport.

15. (Archimedeszi axióma) Nincs legnagyobb elem.

16. (Cantor-féle axióma) Ha zárt intervallumok egy sorozata:

$$I_1 = [a_1, b_1], \quad I_2 = [a_2, b_2], \ldots I_n = [a_n, b_n], \ldots$$

melyek $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \ldots.$



akkor az intervallumoknak *van közös pontja*.

Más szóval, $\exists c \in \mathbb{R}$ melyre $c \in I_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

Cantor-féle axióma, 1. példa

Kérem lerajzolni az alábbi az intervallumokat egy számegyenesen.

$I_1 = [3, 4]$.

$I_2 = [3.1,\ 3.2]$.

$\vdots$

$I_8 = [3.14159265,\ 3.14159266]$

$\vdots$

Vajon mi a közös pont?

(A Cantor axióma $\implies$ *irracionális* számok is vannak.)

Cantor-féle axióma, 2. példa

Kérem lerajzolni az alábbi az intervallumokat egy számegyenesen.

$I_1 = [0, 3]$.

$I_2 = [1 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}]$.

$I_3 = [1 - \frac{1}{3},\ 2 + \frac{1}{3}]$.

$\vdots$

$I_n = [1 - \frac{1}{n},\ 2 + \frac{1}{n}]$.

$\vdots$

Vajon mi a közös pont?

Cantor-féle közöspont-tétel

A két példában: az intervallumoknak **van** közös pontja. Mi volt a különbség?

Tétel

Tegyük fel, hogy a Cantor axióma feltételei teljesülnek:

- I_n, $n \in \mathbb{N}$ *intervallumok zártak, és*
- $I_n \supset I_{n+1}$ $\forall n$.

Ezen kívül tegyük fel, hogy

- $\forall \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists I_k$, *mely* $|I_k| = b_k - a_k < \varepsilon$.

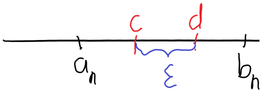
Ekkor a közös pont egyértelmű.

Cantor-féle közöspont-tétel. Indirekt bizonyítás.

A Cantor-axióma miatt **van** közös pont.

Feltesszük, hogy $\exists c < d$ melyek $c, d \in I_k \ \forall k$. Legyen $\varepsilon := d - c > 0$.

Ekkor a feltétel szerint $\exists n \in \mathbb{N}$, amire $b_n - a_n < \varepsilon$.



$$a_n \le c \quad \Longrightarrow \quad \underline{a_n + \varepsilon \le} c + \varepsilon = \underline{d}$$

$$b_n - a_n < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \underline{b_n <} a_n + \varepsilon < \underline{d}$$

$$\Rightarrow\!\Leftarrow$$

Összeg, *szumma*. Szorzat, *produktum*.

Adott n darab szám, $n \in \mathbb{N}$ "*valamennyi*". Ezek összege:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Kompakt formában: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k.}$ Itt k jelentése: *futóindex*.

- Első értéke $k = 1$, ami a *szumma jel alatt* van. Az összeg első tagja a_1.
- $\forall$ lépésben k értéke 1-gyel nő. Az összeg következő tagja a_k.
- Ha k eléri a szumma fölötti értéket: vége.

Hasonlóan, n darab szám szorzata: $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$.

Kompakt formában: $\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k.}$ Most is k: *futóindex*.

Szumma, példák

$$1 + 4 + 9 + \cdots + 144 = \sum_{k=1}^{12} k^2 = \sum_{j=1}^{12} j^2$$

Futóindex "bármi": $\sum_{n=1}^{5} a_n = \sum_{m=1}^{5} a_m$

DE! Mi a különség: $\sum_{n=1}^{5} a_n$ és $\sum_{m=1}^{5} a_n$?

Kis variáció: $a_2 = 8,\ a_3 = 4,\ a_4 = 12,\ a_5 = -3,\ a_6 = -6,\ a_9 = 1.$

Mennyi lesz:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{2k} = ? \qquad \sum_{j=1}^{4} a_{j+1} = ? \qquad \sum_{n=2}^{3} a_{n^2} = ?$$

Korlátosság

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ a valós számok halmazának egy részhalmaza.

A H halmaz **alulról korlátos**, ha $\exists k \in \mathbb{R}$ (alsó korlát), melyre

$$k \leq x \qquad \forall x \in H.$$

A H halmaz **felülről korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$ (felső korlát), melyre

$$x \leq K \qquad \forall x \in H.$$

A H halmaz **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Példa. $H = [-2,\ 2)$ intervallum. Felső korlát?

$K = 5, 15, 115 \ldots$ Melyik a legnagyobb ill. legkisebb?

Ha $H \neq \emptyset$ *felülről korlátos*, akkor a felső korlátok közt $\exists$ *legkisebb*.

Definíció. A halmaz legkisebb felső korlátját SUPREMUMnak nevezzük. Jele $\sup(H)$.

Ekvivalens **Definíció.** $S = \sup(H)$, ha

- egyrészt S felső korlát, azaz $S \geq x$, $\forall x \in H$
- másrészt $\forall S'$ felső korlátra $S' \geq S$.

Következmény. Ha $S = \sup(H)$, akkor $\forall \beta < S$ számra $\exists x \in H$: $x > \beta$. Miért?

Rajzban?

Ha $H \neq \emptyset$ *alulról korlátos*, akkor az alsó korlátok közt $\exists$ legnagyobb.

Definíció. A halmaz legnagyobb alsó korlátját INFIMUMnak nevezzük. Jele $\inf(H)$.

Ekvivalens **Definíció.** $s = \inf(H)$, ha

- egyrészt s alsó korlát, azaz $s \leq x$, $\forall x \in H$
- másrészt $\forall s'$ alsó korlátra $s' \leq s$.

Következmény. Ha $s = \inf(H)$, akkor $\forall \gamma > s$-hez $\exists x \in H$: $x > \gamma$.

Rajzban?

Ha H **üres** halmaz, vajon $\inf H =$? és $\sup(H) =$? Tipp?

1. *Példa.* Legyen $H = [a, b]$. Ekkor

$$\inf(H) = a, \qquad\qquad \sup(H) = b.$$

hiszen ... ?

2. *Példa.* $H = (a, b)$. Ekkor is

$$\inf(H) = a, \qquad\qquad \sup(H) = b.$$

Következmény $\inf(H) \in H$ vagy $\inf(H) \notin H$ is lehet. Mitől függ?

Ha H elemei közül *van legkisebb,* akkor ez az infimum, azaz $\inf(H) = \min(H)$ ha a minimum létezik.

Ha a halmazban *van maximális* elem, akkor $\sup(H) = \max(H)$.

3. *Példa.*

$$H = \left\{ \frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\exists \max(H)$, ezért $\sup(H) = \max(H) = 1$.

$\nexists \min(H)$. Belátjuk, hogy $\inf(H) = 0$.

1. *lépés.* Nyilván $0 \leq 1/n \ \forall n$ -re, tehát a 0 alsó korlát.

2. *lépés.* Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ választással

   $\varepsilon > \dfrac{1}{N+1}$, ezért $\forall \varepsilon > 0$ nem lehet alsó korlát.

Tétel: "az infimum és supremum jól definiáltak"

Tétel *Tfh H nem üres, alulról korlátos halmaz. Ekkor $\exists \inf H$.*
Tfh H nem üres, felülről korlátos halmaz. Ekkor $\exists \sup H$.

Konstruktív bizonyítás: H alulról korlátos, ezért $\exists a_1$ alsó korlátja.

1. eset. Ha $a_1 \in H$, akkor $a_1 = \min(H)$, egyben infimum is. $\surd$

2. eset. Ha $a_1 \notin H$, akkor legyen $b_1 \in H$ tetszőleges, $b_1 > a_1$.

Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ számot.