3. Algebrai kifejezések, átalakítások

I. Elméleti összefoglaló

Műveletek polinomokkal

Az olyan betűs kifejezéseket, amelyek csak valós számokat, változók pozitív egész kitevőjű hatványait, valamint összeadás, kivonás és szorzás műveleteket tartalmaznak, **polinomoknak** nevezzük. Például: $3x^2+2x$, $5x^2-xy+y^3$, $a^2+\sqrt{2}b$, $(a+b)\cdot(a^2+b^2)$, 10.

A polinomokat az összeadás és a kivonás szerint **tagokra**, a szorzás szerint **tényezőkre** bonthatjuk. Például $a^3+10ab-b^2$ egy háromtagú kifejezés, $(x-4y)\cdot(x+y^2-xy)$ egy kéttényezős szorzat, amelynek első tényezője egy kéttagú, második tényezője egy háromtagú kifejezés. (Valójában $y^2=y\cdot y$-t és $xy=x\cdot y$-t is tekinthetnénk egy-egy kéttényezős szorzatnak, de általában tényezőkről csak a többtagú kifejezéseket tartalmazó zárójelek – például $(x-4y)$ és $(x+y^2-xy)$ – esetében beszélünk.) Az azonos tényezőkből álló szorzatot hatványalakban is írhatjuk, például $(a+b)^3$ egy háromtényezős szorzat.

A polinomok tagjaiban szereplő számokat **együtthatóknak**, az egy tagban szereplő ismeretlenek kitevőinek összegét **fokszámnak** nevezzük. Például $10ab$ együtthatója 10, fokszáma 2, míg x^5 együtthatója 1, fokszáma 5. Egy **polinom fokszámának** (vagy **fokának**) a benne szereplő tagok fokszámai közül a legnagyobbat nevezzük. Például a $-x^3+2x+7$ harmadfokú, az $x^3y^2+y^4+x^3+xy$ ötödfokú, az 5 nulladfokú (konstans) kifejezés. A polinomok tagjait gyakran fokszámuk szerinti csökkenő sorrendben írjuk (több azonos fokú tag esetén azokat valamelyik változó fokszáma szerint rendezzük).

Két kifejezést **egyneműnek** nevezünk, ha ugyanazon változók szerepelnek bennük, ugyanazokon a hatványkitevőkön, azaz legfeljebb együtthatóikban különböznek. Például $-3c^2d$ és $10c^2d$ egynemű kifejezések. Az egynemű kifejezéseket gyakran **összevonjuk**, például $-3c^2d+10c^2d=7c^2d$.

Egy kéttényezős szorzatot átalakíthatunk **zárójelfelbontással** úgy, hogy az egyik kifejezés minden tagját megszorozzuk a másik kifejezés minden tagjával, majd a kapott szorzatokat összeadjuk, például $(x-4y)\cdot(x+y^2-xy)=x^2+xy^2-x^2y-4yx-4y^3+4yxy=-x^2y+5xy^2-4y^3+x^2-4xy$ (az utolsó lépésben az egynemű kifejezéseket összevontuk, továbbá a polinom tagjait fokszám szerinti csökkenő sorrendbe rendeztük, az azonos fokú tagokon belül *x* fokszáma szerint haladva.)

Szorzattá alakítás

Gyakran célszerű egy többtagú kifejezést több kifejezés szorzataként felírnunk. Ha ezt meg tudjuk tenni, akkor azt mondjuk, hogy **szorzattá alakítjuk** a kifejezést. Például $x^2-4y^2=(x+2y)\cdot(x-2y)$, $c^2+2cd+d^2=(c+d)\cdot(c+d)=(c+d)^2$. A szorzattá alakítás nem mindig végezhető el, például x^2+4y^2 nem írható fel két (vagy több) polinom szorzataként.

A szorzattá alakítás történhet:

- a több tagban is szereplő változó(k) **kiemelésével**, például $u^2+2u=u\cdot(u+2)$;

- a tagok megfelelő sorrendbe történő **csoportosításával**, majd több egymás utáni kiemeléssel, például $ac+bd+ad+bc=ac+bc+ad+bd=c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)=(a+b)\cdot(c+d)$;

- egyváltozós polinomok esetén a **gyöktényezős alak** segítségével, például $2x^2-12x+10$ esetén a $2x^2-12x+10=0$ másodfokú egyenlet $x_1=1$ és $x_2=5$ gyökeit felhasználva $2\cdot(x-1)\cdot(x-5)$ módon (ez magasabb fokú polinomoknál csak akkor alkalmazható, ha könnyen ki tudjuk számítani a megfelelő egyenlet gyökeit);

- a **nevezetes azonosságok** alkalmazásával (ezek felsorolását lásd a következő részben).

Másodfokú függvények ábrázolásakor használatos még a **teljes négyzetté alakítás**, amikor a megadott kifejezést egy zárójeles kifejezés négyzetének segítségével próbáljuk meg felírni. Ha a függvénynek van (egy vagy két) zérushelye, akkor eljuthatunk a szorzatalakig, például $x^2-10x+25=(x-5)^2$ és $x^2-6x+5=(x-3)^2-4=(x-3-2)\cdot(x-3+2)=(x-5)\cdot(x-1)$. A teljes négyzetté alakítás azonban nem mindig jelent szorzattá alakítást. Ha ugyanis a függvénynek nincs zérushelye (és így a kifejezésnek sincs gyöktényezős alakja), akkor nem kaphatunk szorzatalakot, hanem csak egy kifejezés négyzetének és egy konstans tagnak az összegét, például $x^2-6x+13=(x-3)^2+4$.

Nevezetes azonosságok

A gyakran használt zárójelfelbontási és szorzattá alakítási összefüggéseket nevezetes azonosságok formájában szoktuk megfogalmazni. Az alábbiakban *a*, *b* és *c* tetszőleges valós számokat jelölnek.

A zárójelfelbontásból adódó azonosságok a következők:

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

A szorzattá alakításból adódó azonosságok a következők:

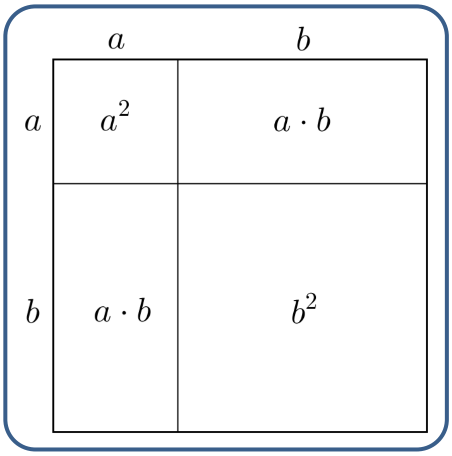
- a^2+b^2 a valós számkörben nem alakítható szorzattá;
- $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$;
- $a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$;
- $a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Megjegyzés: Az azonosságok fenti két csoportba sorolása nem jelent éles elkülönülést, mind a két típusú (zárójelfelbontással, illetve szorzattá alakítással keletkező) azonosság megfordítható. Ha például egy kifejezés átalakítása során $(a+b)^2$ helyére írunk $a^2+2ab+b^2$-et, akkor zárójelfelbontást alkalmaztunk, ha viszont $a^2+2ab+b^2$ helyére írunk $(a+b)^2$-t, akkor szorzattá alakítást. Ugyanígy bizonyos feladatokban (főként törtek egyszerűsítésénél, közös nevező meghatározásánál) célszerű a^2-b^2 helyére $(a+b)\cdot(a-b)$-t írnunk (szorzattá alakítás), míg más feladatokban (főként összevonásnál, polinomok összeadásakor) célravezető $(a+b)\cdot(a-b)$ helyére a^2-b^2-et írnunk (zárójelfelbontás).

Megjegyzés: A nevezetes azonosságok a következőképpen általánosíthatók (ahol *n* pozitív egész):

- $(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\ldots+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$ (binomiális tétel);
- $(a-b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0-\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\ldots\pm\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k\cdot(-1)^k$;
- ha *n* **páratlan**, akkor $a^n+b^n=(a+b)\cdot\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+b^{n-1}\right)$;
- ha *n* **páros**, akkor $a^n-b^n=(a+b)\cdot\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+\ldots-b^{n-1}\right)$;
- tetszőleges pozitív egész *n*-re $a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}\right)$.

Megjegyzés: A nevezetes azonosságoknak geometriai jelentést is tulajdoníthatunk, például pozitív *a* és *b* esetén $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ szemléltethető egy $a+b$ oldalú négyzet területének kétféle kiszámításával: a négyzet területe egyrészt $(a+b)^2$, másrészt az ábra szerint négy részre darabolva az egyes részek területének összege $a^2+ab+ab+b^2$.



Algebrai törtek

Két polinom hányadosát **algebrai törtnek** nevezzük. Például: $\frac{x}{y}$, $\frac{2x^2+2x}{xy+x}$, $\frac{a^3-b^3}{(a-b)\cdot 2a^2}$. Míg a polinomokat a bennük szereplő változók bármely (valós) értéke esetén értelmezni tudtuk, addig az algebrai törtek **értelmezési tartományának** vizsgálatakor ki kell zárnunk azokat a helyettesítési értékeket, amikor a nevező 0.

Az algebrai törtekkel a következő műveleteket végezhetjük:

- Algebrai törtek **egyszerűsítésekor** a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítjuk (ha lehet), és a közös tényezőket (ha vannak) elhagyjuk, például $\frac{2x^2+2x}{xy+x}=\frac{2x\cdot(x+1)}{x\cdot(y+1)}=\frac{2\cdot(x+1)}{y+1}$. Nagyon fontos, hogy egyszerűsíteni csak szorzatalakban, szorzótényezővel szabad, tehát például $\frac{2x+3}{y+3}$-at nem „egyszerűsíthetjük” $\frac{2x}{y}$-ra (hiszen ez egy másik algebrai tört, amelynek helyettesítési értéke általában nem egyezik meg az eredeti tört helyettesítési értékével).
- Algebrai törtek **összevonásakor** a törteket **bővítéssel** közös nevezőre hozzuk, majd a számlálókat összevonjuk, például $\frac{x}{y}+\frac{y+x}{x+1}=\frac{x\cdot(x+1)}{y\cdot(x+1)}+\frac{y\cdot(y+x)}{y\cdot(x+1)}=\frac{x^2+x+y^2+xy}{y\cdot(x+1)}$.
- Algebrai törtek **szorzása** a törtek szorzásának megfelelően történik (a szorzat számlálója a számlálók szorzata, nevezője a nevezők szorzata lesz), például $\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{b^2}{a-b}=\frac{2ab^2}{(a+b)(a-b)}$.

  Természetesen szükség esetén egyszerűsíthetünk, például $\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x+1}=\frac{2xy}{y\cdot(x+1)}=\frac{2x}{x+1}$.
- Algebrai törtek **osztása** a törtek osztásának megfelelően történik (az osztó reciprokával szorzunk), például $\frac{c^2-d^2}{c^3}:\frac{c+d}{c}=\frac{c^2-d^2}{c^3}\cdot\frac{c}{c+d}=\frac{\left(c^2-d^2\right)\cdot c}{c^3\cdot(c+d)}$. Természetesen itt is egyszerűsíthetünk, az előző példában $\frac{\left(c^2-d^2\right)\cdot c}{c^3\cdot(c+d)}=\frac{(c+d)\cdot(c-d)\cdot c}{c^3\cdot(c+d)}=\frac{c-d}{c^2}$.

II. Kidolgozott feladatok

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd adjuk meg az eredményt minél egyszerűbb alakban!

a) $(a+7)\cdot(a-2)-(2a-3)\cdot(a+5)$ **b)** $(5b-4c)\cdot(3c+2b)$

Megoldás: A zárójelek felbontása, majd az egynemű kifejezések összevonása után a következőket kapjuk:

a) $(a+7)\cdot(a-2)-(2a-3)\cdot(a+5)=a^2-2a+7a-14-\left(2a^2+10a-3a-15\right)=-a^2-2a+1$.

b) $(5b-4c)\cdot(3c+2b)=15bc+10b^2-12c^2-8bc=10b^2+7bc-12c^2$.

2. A zárójelek felbontásával alakítsuk át többtagú kifejezéssé a következőket!

a) $(3+c)^2$ **b)** $(4a^2b-1)^2$ **c)** $(4ij+3k)\cdot(4ij-3k)$

d) $(2b+3)^3$ **e)** $(d-4)^3$ **f)** $(d-2c)\cdot(d^2+2cd+4c^2)$

Megoldás: A nevezetes azonosságok alkalmazásával a következőket kapjuk:

a) $(3+c)^2=9+6c+c^2$.

b) $(4a^2b-1)^2=16a^4b^2-8a^2b+1$.

c) $(4ij+3k)\cdot(4ij-3k)=(4ij)^2-(3k)^2=16i^2j^2-9k^2$.

d) $(2b+3)^3=(2b)^3+3\cdot(2b)^2\cdot3+3\cdot2b\cdot3^2+3^3=8b^3+36b^2+54b+27$.

e) $(d-4)^3=d^3-3\cdot d^2\cdot4+3\cdot d\cdot4^2-4^3=d^3-12d^2+48d-64$.

f) $(d-2c)\cdot(d^2+2cd+4c^2)=d^3-(2c)^3=d^3-8c^3$.

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $22i^2-10ij+33ik-15jk$ **b)** $2a\cdot(x-y)-3b\cdot(y-x)$ **c)** $l^2-20l+100$

d) $125x^3-64y^6$ **e)** $8c^3+12c^2d+6cd^2+d^3$ **f)** $3p^2-6p-189$

Megoldás:

Az első két esetben csoportosítást és kiemelést alkalmazunk:

a) $(22i^2-10ij)+(33ik-15jk)=2i\cdot(11i-5j)+3k\cdot(11i-5j)=(11i-5j)\cdot(2i+3k)$. Másképpen csoportosítva: $(22i^2+33ik)-(10ij+15jk)=11i\cdot(2i+3k)-5j\cdot(2i+3k)=(2i+3k)\cdot(11i-5j)$.

b) $2a\cdot(x-y)-3b\cdot(y-x)=2a\cdot(x-y)+3b\cdot(x-y)=(x-y)\cdot(2a+3b)$.

A következő három esetben a nevezetes azonosságokat alkalmazzuk:

c) $l^2-20l+100=(l-10)^2$.

d) $125x^3-64y^6=(5x)^3-(4y^2)^3=(5x-4y^2)\cdot(25x^2+20xy^2+16y^4)$.

e) $8c^3+12c^2d+6cd^2+d^3=(2c+d)^3$.

Az utolsó esetben a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját használjuk:

f) A $3p^2-6p-189=0$ egyenlet megoldásai $p_1=-7$ és $p_2=9$, így a gyöktényezős alak a következő: $3p^2-6p-189=3\cdot(p+7)\cdot(p-9)$. Ugyanezt megadhatjuk $(3p+21)\cdot(p-9)$ vagy $(p+7)\cdot(3p-27)$ alakban is.

4. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{4a^2-4}{7a+7}$ **b)** $\dfrac{4c^3-4d^3}{8c^2-8d^2}$ **c)** $\dfrac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}$

Megoldás: Először a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítjuk, majd a közös szorzótényezőkkel egyszerűsítünk. Bár a feladat szövege nem kérdezett rá, megadjuk azt is, hogy az egyes kifejezések a változók mely értékeire nincsenek értelmezve (mert ekkor a törtek nevezője 0 lenne).

a) $\dfrac{4a^2-4}{7a+7}=\dfrac{4\cdot(a^2-1)}{7\cdot(a+1)}=\dfrac{4\cdot(a+1)\cdot(a-1)}{7\cdot(a+1)}=\dfrac{4\cdot(a-1)}{7}$, ahol $a\neq-1$.

b) $\dfrac{4c^3-4d^3}{8c^2-8d^2}=\dfrac{4\cdot(c-d)\cdot(c^2+cd+d^2)}{8\cdot(c+d)\cdot(c-d)}=\dfrac{c^2+cd+d^2}{2\cdot(c+d)}$. Az egyszerűsítés során bővül a kifejezés értelmezési tartománya, ugyanis az eredeti kifejezésben $c+d\neq0$ és $c-d\neq0$ (vagyis $c\neq\pm d$), míg az egyszerűsítés után már csak a $c+d\neq0$ feltétel (vagyis $c\neq-d$) marad meg. Viszont az átalakítás csak az eredeti értelmezési tartományon igaz, hiszen $c=d$ esetén csak az egyszerűsített kifejezést tudnánk értelmezni, az eredetit nem. Így az ilyen típusú feladatokban mindig az eredeti kifejezés értelmezési tartományát (pontosabban a meg nem engedett eseteket) fogjuk megadni.

c) $\dfrac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}=\dfrac{5\cdot(x+y)\cdot(x-y)}{10\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{x-y}{2\cdot(x^2-xy+y^2)}$, ahol $x^3+y^3\neq0$, azaz $x\neq-y$.

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{3a+2}{2a+1}+\dfrac{1-4a}{4a-2}-\dfrac{2a^2}{4a^2-1}$ **b)** $\dfrac{e^2-ef}{e^2+ef}\cdot\dfrac{e^2f+ef^2}{ef}$ **c)** $\dfrac{x^2+xy}{x^2-xy}:\dfrac{5x^2-5y^2}{3x^3-3y^3}$

Megoldás: A szükséges összevonások, illetve a lehetséges egyszerűsítések céljából mindhárom esetben először szorzattá alakítjuk a kifejezések számlálóit és nevezőit (ahol ez lehetséges), majd ezekkel végezzük el a műveleteket.

a) $\dfrac{3a+2}{2a+1}+\dfrac{1-4a}{4a-2}-\dfrac{2a^2}{4a^2-1}=\dfrac{3a+2}{2a+1}+\dfrac{1-4a}{2\cdot(2a-1)}-\dfrac{2a^2}{(2a+1)\cdot(2a-1)}=$

$=\dfrac{(3a+2)\cdot(4a-2)+(1-4a)\cdot(2a+1)-2a^2\cdot2}{2\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)}=\dfrac{12a^2-6a+8a-4+2a+1-8a^2-4a-4a^2}{2\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)}=$

$=\dfrac{-3}{2\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)}$, ahol $a\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{e^2-ef}{e^2+ef}\cdot\dfrac{e^2f+ef^2}{ef}=\dfrac{e\cdot(e-f)}{e\cdot(e+f)}\cdot\dfrac{ef\cdot(e+f)}{ef}=\dfrac{e-f}{e+f}\cdot(e+f)=e-f$, ahol $e\neq0$, $f\neq0$ és $e\neq-f$.

c) $\dfrac{x^2+xy}{x^2-xy}:\dfrac{5x^2-5y^2}{3x^3-3y^3}=\dfrac{x^2+xy}{x^2-xy}\cdot\dfrac{3x^3-3y^3}{5x^2-5y^2}=\dfrac{x\cdot(x+y)}{x\cdot(x-y)}\cdot\dfrac{3\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}{5\cdot(x+y)\cdot(x-y)}=$

$=\dfrac{x\cdot(x+y)\cdot 3\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}{x\cdot(x-y)\cdot 5\cdot(x+y)\cdot(x-y)}=\dfrac{3\cdot(x^2+xy+y^2)}{5\cdot(x-y)}$, ahol $x\neq 0$, $x-y\neq 0$, $x+y\neq 0$ és $x^3-y^3\neq 0$, vagy összefoglalóan $x\neq 0$ és $x\neq \pm y$. (Az értelmezési tartomány vizsgálatakor az eredeti törtek nevezőiről, illetve az osztó számlálójáról kötöttük ki, hogy egyik sem lehet 0.)

6. Egyszerűsítsük a $\dfrac{6b^3-19b^2+39b-36}{2b-3}$ törtet, ahol $b\neq 1{,}5$!

Megoldás: A törtet akkor tudjuk egyszerűsíteni, ha a számlálót szorzattá alakítva ki tudunk emelni belőle $2b-3=2\cdot(b-1{,}5)$-et (vagy $b-1{,}5$-et). Ezt valóban meg tudjuk tenni, mert $b=1{,}5$ esetén a számláló értéke $6\cdot 1{,}5^3-19\cdot 1{,}5^2+39\cdot 1{,}5-36=20{,}25-42{,}75+58{,}5-36=0$. Tehát $b=1{,}5$ gyöke a $6b^3-19b^2+39b-36=0$ egyenletnek, így annak gyöktényezős alakjában szerepelni fog a $b-1{,}5$ tényező.

A harmadfokú egyenlet további gyökeinek ismerete nélkül azonban közvetlenül nem tudjuk felírni a $b-1{,}5$ kiemelése után maradó további szorzótényező(ke)t. Ezért – a racionális számok osztásához hasonlóan – el kell osztanunk a számlálót $b-1{,}5$-tel. Ezt a következőképpen tehetjük meg, az úgynevezett polinomosztás módszerével:

$$\left(6b^3-19b^2+39b-36\right):(b-1{,}5)=\ldots$$

Mivel az osztandó harmadfokú, az osztó pedig elsőfokú, ezért a hányados biztosan másodfokú lesz. Az osztandóban a legmagasabb fokú tag $6b^3$, az osztóban pedig *b*, ezért a hányados legmagasabb fokú tagja $\dfrac{6b^3}{b}=6b^2$. Visszaszorozva kapjuk, hogy $6b^2\cdot(b-1{,}5)=6b^3-9b^2$, amelyet levonunk az osztandóból:

$$\begin{array}{l}
\left(6b^3-19b^2+39b-36\right):(b-1{,}5)=6b^2+\ldots\\
\underline{\;6b^3-9b^2\qquad\qquad\quad}\\
\qquad -10b^2+39b-36
\end{array}$$

Innentől az eddigi lépéseket ismételjük, először a $-10b^2+39b-36$ kifejezésre, és így tovább:

$$\begin{array}{l}
\left(6b^3-19b^2+39b-36\right):(b-1{,}5)=6b^2-10b+24\\
\underline{\;6b^3-9b^2\qquad\qquad\quad}\\
\qquad -10b^2+39b-36\\
\qquad \underline{-10b^2+15b\qquad}\\
\qquad\qquad\qquad 24b-36\\
\qquad\qquad\qquad \underline{24b-36}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Az utolsó lépésben 0 maradékot kaptunk, tehát a $6b^3-19b^2+39b-36$ kifejezés maradék nélkül osztható $b-1{,}5$-tel. Vagyis $6b^3-19b^2+39b-36=(b-1{,}5)\cdot\left(6b^2-10b+24\right)$. A második tényezőből 2-t kiemelve a tört így írható fel: $\frac{6b^3-19b^2+39b-36}{2b-3}=\frac{(b-1{,}5)\cdot 2\cdot(3b^2-5b+12)}{2\cdot(b-1{,}5)}$. Tehát a tört egyszerűsített alakja $3b^2-5b+12$.

7. Határozzuk meg számológép használata nélkül a következő műveletek végeredményét!

a) $59\cdot 61$ **b)** 403^2 **c)** 79^2

d) 102^3 **e)** 62^2-38^2 **f)** 999^3

Megoldás: A szorzások írásbeli elvégzése helyett alkalmazhatjuk a nevezetes azonosságokat, így a műveletek végeredményei akár fejben is kiszámíthatók:

a) $59\cdot 61=(60-1)\cdot(60+1)=60^2-1^2=3600-1=3599$.

b) $403^2=(400+3)^2=400^2+2\cdot 400\cdot 3+3^2=160000+2400+9=162409$.

c) $79^2=(80-1)^2=80^2-2\cdot 80\cdot 1+1^2=6400-160+1=6241$.

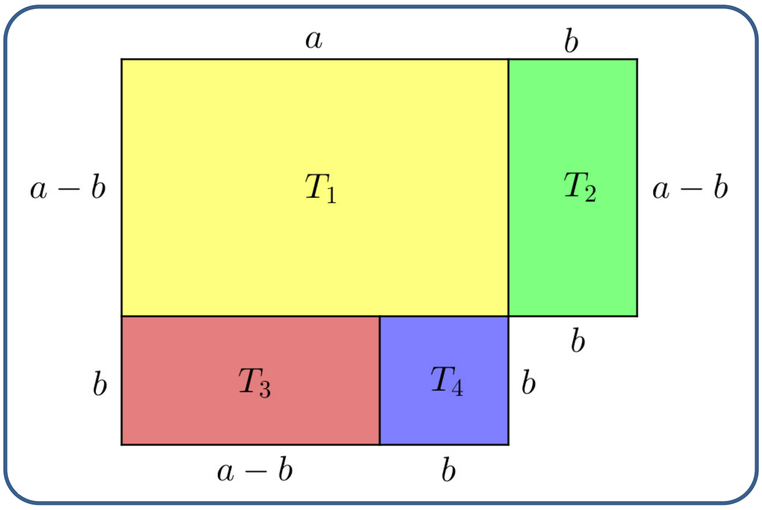
d) $102^3=(100+2)^3=100^3+3\cdot 100^2\cdot 2+3\cdot 100\cdot 2^2+2^3=1000000+60000+1200+8=1061208$.

e) $62^2-38^2=(62+38)\cdot(62-38)=100\cdot 24=2400$.

f) $999^3=(1000-1)^3=1000^3-3\cdot 1000^2\cdot 1+3\cdot 1000\cdot 1^2-1^3=1000000000-3000000+3000-1=$
$=1\,000\,003\,000-3\,000\,001=997\,002\,999$.

8. Igazoljuk grafikus úton az $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ összefüggést!

Megoldás: Tegyük fel először, hogy $a>b$, majd tekintsük a következő ábrát (T_1, T_2, T_3 és T_4 a megfelelő téglalapok területét jelöli, de a bizonyításban ezeket felhasználjuk az egyes téglalapokra történő hivatkozásként is):



Az ábrán T_1, T_3 és T_4 együttesen egy a oldalú négyzetet alkot, így $T_1+T_3+T_4=a^2$. Mivel T_4

egy b oldalú négyzet, ezért $T_4 = b^2$, vagyis $T_1 + T_3 = a^2 - b^2$. Mivel T_1 és T_2 együttesen egy $a+b$ szélességű, $a-b$ magasságú téglalapot alkot, ezért $T_1 + T_2 = (a+b)\cdot(a-b)$. Továbbá $T_2 = T_3$, hiszen mindkettő egy-egy b és $a-b$ oldalhosszúságú téglalap. Vagyis $T_1 + T_3 = T_1 + T_2$, így éppen a bizonyítandó $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ összefüggést kaptuk, ezzel az állítást beláttuk.

Ha $a = b$, akkor az $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ egyenlőség mindkét oldala 0, tehát az biztosan teljesül. Ha pedig $a < b$, akkor az egyenlőség mindkét oldalát (-1)-gyel szorozva a $b^2 - a^2 = (b+a)\cdot(b-a)$ összefüggést kapjuk, amelynek bizonyításához elegendő az előző ábrán a és b szerepét felcserélni.

9. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0$ egyenletet!

I. Megoldás: A negyedfokú egyenletekre létezik általános megoldási eljárás, ez azonban meghaladja a középiskolai módszereket. A mostani feladatban szereplő negyedfokú egyenlet viszont speciális, úgynevezett szimmetrikus egyenlet, mert az együtthatók szimmetrikusak (a negyedfokú és a konstans tag együtthatója egyaránt 6, a harmadfokú és az elsőfokú tag együtthatója egyaránt -25). Szimmetrikus egyenletekre alkalmazható a következőkben ismertetett módszer.

Mivel $x = 0$ nem megoldása az egyenletnek (hiszen a konstans tag 6, tehát $x = 0$ esetén a bal oldal értéke 6), ezért leoszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát x^2-tel: $6x^2 - 25x + 38 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$.

A szimmetrikus tagokat egymás mellé rendezve ezt kapjuk: $6\cdot\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right) + 38 = 0$.

Mivel $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, ezért $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. Így az $y = x + \frac{1}{x}$ új ismeretlen bevezetésével az egyenlet $6\cdot\left(y^2 - 2\right) - 25y + 38 = 0$ alakban írható, amely y-ra nézve másodfokú, a rendezés után ezt kapjuk: $6y^2 - 25y + 26 = 0$. Ennek megoldásai $y_1 = \frac{13}{6}$ és $y_2 = 2$.

Ha $y_1 = \frac{13}{6}$, akkor az $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ egyenlet mindkét oldalát x-szel szorozva az $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ha $y_2 = 2$, akkor az $x + \frac{1}{x} = 2$ egyenlet mindkét oldalát x-szel szorozva az $x^2 - 2x + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek egyetlen megoldása $x_3 = 1$.

Tehát az eredeti egyenletnek három valós megoldása van: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ és 1. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek valóban jó megoldások.

II. Megoldás: Magasabb fokú egyenletek megoldásánál hasznos lehet, ha valamilyen úton megsejtjük az egyenlet egyik gyökét, ekkor ugyanis a megfelelő gyöktényező kiemelésével és polinomosztással a megoldást visszavezethetjük egy alacsonyabb fokú egyenlet megoldására. Mivel a $6x^4-25x^3+38x^2-25x+6=0$ egyenletben az együtthatók összege $6-25+38-25+6=0$, ezért az egyenletnek gyöke az 1 (mert $x=1$ esetén a kifejezés helyettesítési értéke pont az együtthatók összege), vagyis $x-1$ biztosan kiemelhető gyöktényezőként. Polinomosztással kapjuk:

$$\begin{array}{l}
\left(6x^4-25x^3+38x^2-25x+6\right):(x-1)=6x^3-19x^2+19x-6\\
\underline{6x^4-6x^3}\\
\quad -19x^3+38x^2-25x+6\\
\quad \underline{-19x^3+19x^2}\\
\qquad\qquad 19x^2-25x+6\\
\qquad\qquad \underline{19x^2-19x}\\
\qquad\qquad\qquad -6x+6\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-6x+6}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

A $6x^3-19x^2+19x-6=0$ harmadfokú egyenletben az együtthatók összege $6-19+19-6=0$, tehát ennek az egyenletnek is gyöke az 1, így $x-1$ még egyszer kiemelhető gyöktényezőként:

$$\begin{array}{l}
\left(6x^3-19x^2+19x-6\right):(x-1)=6x^2-13x+6\\
\underline{6x^3-6x^2}\\
\quad -13x^2+19x-6\\
\quad \underline{-13x^2+13x}\\
\qquad\qquad 6x-6\\
\qquad\qquad \underline{6x-6}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

A $6x^2-13x+6=0$ másodfokú egyenlet gyökei (a megoldóképlettel) $x_1=\frac{2}{3}$ és $x_2=\frac{3}{2}$.

Tehát az eredeti negyedfokú egyenlet megoldásai: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$ és $x_3=x_4=1$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek valóban jó megoldások.

Megjegyzés: A fenti gondolatmenetben láttuk, hogy ha egy egyenletben az együtthatók összege 0, akkor az egyenletnek gyöke az 1. Hasznos megfigyelés még, hogy ha egy egyenlet együtthatóinak váltakozó előjelű összege 0, akkor az egyenletnek gyöke a -1.

III. Ajánlott feladatok

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd adjuk meg az eredményt minél egyszerűbb alakban!

a) $(a-5)\cdot(a+3)+(a+2)\cdot(a-4)$ **b)** $(5p-4q)\cdot\left(pq+3p^2-2\right)$

c) $\left(w^2+w+1\right)\cdot\left(w^2-w-1\right)$ **d)** $\left(u^n+v^n\right)\cdot\left(u^{2n}-u^nv^n+v^{2n}+1\right)$, ahol $n\in\mathbb{Z}^+$

2. A zárójelek felbontásával alakítsuk át többtagú kifejezéssé a következőket!

a) $\left(-\frac{3}{2}e+\frac{1}{3}f\right)^2$ **b)** $\left(2x^2y-3xy^3\right)^3$ **c)** $(2c+5)\cdot(5+2c)$

d) $\left(a^n+b^4\right)\cdot\left(a^n-b^4\right)$ **e)** $\left(3pq^3-2\right)^2$ **f)** $\left(2t-u\right)\cdot\left(4t^2+2tu+u^2\right)$

g) $\left(c+4\right)^3$ **h)** $\left(2uv+4s\right)\cdot\left(2uv-4s\right)$ **i)** $\left(k+2l+3m\right)^2$

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $144j^2+120ij+25i^2$ **b)** $25u^2r^4-16p^6$ **c)** $49z^2-112rz+64r^2$

d) $u^3-6u^2v+12uv^2-8v^3$ **e)** a^3+8 **f)** $18jl-10km-12jm+15kl$

g) $64c^3-27d^6$ **h)** $6z^2-z-2$ **i)** $x^2y-2x^2+6xy-12x+10y-20$

4. Egyszerűsítsük a törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{6b+6}{3b^2-3}$ **b)** $\dfrac{8c^2-8d^2}{10c^3+10d^3}$ **c)** $\dfrac{u^3-9u^2+27u-27}{u^2-9}$

d) $\dfrac{b^2+6b+5}{b^2+3b+2}$ **e)** $\dfrac{a^3+v^3}{\left(a-v\right)^2+av}$ **f)** $\dfrac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$

g) $\dfrac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}$ **h)** $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ **i)** $\dfrac{s^5+s^4t-2s^3t^2}{3s^3+5s^2t-2st^2}$

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}-\dfrac{c+d}{2c-2d}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{e}-\sqrt{f}}+\dfrac{4}{\sqrt{e}+\sqrt{f}}$ **c)** $\dfrac{m^2-6m+8}{m^2+4m+3}:\dfrac{m^2-4m+4}{5m+15}$

d) $\dfrac{5-g}{g^2-8g+16}+\dfrac{6}{5g-20}$ **e)** $\dfrac{a^3-8}{5a+15}\cdot\dfrac{7a+21}{a^2+2a+4}$ **f)** $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$

g) $\dfrac{u+v}{u}-\dfrac{u-1}{u-v}+\dfrac{v^2}{u^2-uv}$ **h)** $\left(l+\dfrac{1}{l}-1\right)\cdot\left(l+\dfrac{1}{l}+1\right)$ **i)** $\left(\dfrac{j^2}{i^3-ij^2}+\dfrac{1}{i+j}\right):\left(\dfrac{i-j}{i^2+ij}-\dfrac{i}{j^2+ij}\right)$

6. Egyszerűsítsük a törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{9a^3-42a^2+52a-16}{6a-8}$ **b)** $\dfrac{8b^4-12b^3+2b^2+23b-39}{4b^2-9}$

7. Határozzuk meg számológép használata nélkül a következő műveletek végeredményét!

a) 508^2 **b)** 8^3+12^3 **c)** 39^3

d) $61\cdot 79$ **e)** 123^2 **f)** 15^3-5^3

8. Határozzuk meg számológép használata nélkül, hogy az 1591 és a 4891 közül melyik számnak van több pozitív osztója!

9. Határozzuk meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy minden $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -3$ esetén teljesül az $\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3}$ összefüggés!

10. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $8x^3 - 6x^2 - 29x - 15 = 0$ **b)** $20x^4 + 8x^3 - 105x^2 + 8x + 20 = 0$

11. Döntsük el a következő műveletek végeredményeiről, hogy racionálisak vagy irracionálisak-e!

a) $\sqrt{3\sqrt{29}-6} \cdot \sqrt{3\sqrt{29}+6}$ **b)** $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$

12. Határozzuk meg a $2x^2 + y^2 + 2x + 2xy + 4$ kifejezés minimumát, ha x és y tetszőleges valós szám lehet!

13. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ kifejezés értékét, ha $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ és $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ teljesül (ahol a, b, c, x, y és z egyike sem 0)!

14. Írjuk fel minél egyszerűbb alakban a következő kifejezést, ahol $x \notin \{0; -1; -2; -3; -4; -5\}$:

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)} + \frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)} + \frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)} + \frac{1}{(x+3)\cdot(x+4)} + \frac{1}{(x+4)\cdot(x+5)}$$

Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd adjuk meg az eredményt minél egyszerűbb alakban!

a) $(a-5)\cdot(a+3)+(a+2)\cdot(a-4)$ **b)** $(5p-4q)\cdot(pq+3p^2-2)$

c) $(w^2+w+1)\cdot(w^2-w-1)$ **d)** $(u^n+v^n)\cdot(u^{2n}-u^nv^n+v^{2n}+1)$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$

Megoldás:

a) $(a-5)\cdot(a+3)+(a+2)\cdot(a-4) = a^2+3a-5a-15+a^2-4a+2a-8 = 2a^2-4a-23$.

b) $(5p-4q)\cdot(pq+3p^2-2) = 5p^2q+15p^3-10p-4pq^2-12p^2q+8q =$
$= 15p^3-7p^2q-4pq^2-10p+8q$.

c) $(w^2+w+1)\cdot(w^2-w-1) = w^4-w^3-w^2+w^3-w^2-w+w^2-w-1 = w^4-w^2-2w-1$. Másképpen: $(w^2+(w+1))\cdot(w^2-(w+1)) = (w^2)^2-(w+1)^2 = w^4-w^2-2w-1$.

d) $(u^n+v^n)\cdot(u^{2n}-u^nv^n+v^{2n}+1) = u^{3n}-u^{2n}v^n+u^nv^{2n}+u^n+u^{2n}v^n-u^nv^{2n}+v^{3n}+v^n =$
$= u^{3n}+v^{3n}+u^n+v^n$. Másképpen: $(u^n+v^n)\cdot((u^{2n}-u^nv^n+v^{2n})+1) = (u^n)^3+(v^n)^3+u^n+v^n$.

2. A zárójelek felbontásával alakítsuk át többtagú kifejezéssé a következőket!

a) $\left(-\frac{3}{2}e+\frac{1}{3}f\right)^2$ **b)** $\left(2x^2y-3xy^3\right)^3$ **c)** $\left(2c+5\right)\cdot\left(5+2c\right)$

d) $\left(a^n+b^4\right)\cdot\left(a^n-b^4\right)$ **e)** $\left(3pq^3-2\right)^2$ **f)** $\left(2t-u\right)\cdot\left(4t^2+2tu+u^2\right)$

g) $\left(c+4\right)^3$ **h)** $\left(2uv+4s\right)\cdot\left(2uv-4s\right)$ **i)** $\left(k+2l+3m\right)^2$

Megoldás: A nevezetes azonosságok alkalmazásával a következőket kapjuk:

a) $\left(-\frac{3}{2}e+\frac{1}{3}f\right)^2=\frac{9}{4}e^2-ef+\frac{1}{9}f^2$.

b) $\left(2x^2y-3xy^3\right)^3=8x^6y^3-36x^5y^5+54x^4y^7-27x^3y^9$.

c) $\left(2c+5\right)\left(5+2c\right)=\left(2c+5\right)^2=4c^2+20c+25$.

d) $\left(a^n+b^4\right)\left(a^n-b^4\right)=a^{2n}-b^8$.

e) $\left(3pq^3-2\right)^2=9p^2q^6-12pq^3+4$.

f) $\left(2t-u\right)\left(4t^2+2tu+u^2\right)=8t^3-u^3$.

g) $\left(c+4\right)^3=c^3+12c^2+48c+64$.

h) $\left(2uv+4s\right)\left(2uv-4s\right)=4u^2v^2-16s^2$.

i) $\left(k+2l+3m\right)^2=k^2+4l^2+9m^2+4kl+6km+12lm$.

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $144j^2+120ij+25i^2$ **b)** $25u^2r^4-16p^6$ **c)** $49z^2-112rz+64r^2$

d) $u^3-6u^2v+12uv^2-8v^3$ **e)** a^3+8 **f)** $18jl-10km-12jm+15kl$

g) $64c^3-27d^6$ **h)** $6z^2-z-2$ **i)** $x^2y-2x^2+6xy-12x+10y-20$

Megoldás:

a) $144j^2+120ij+25i^2=\left(12j+5i\right)^2$.

b) $25u^2r^4-16p^6=\left(5ur^2+4p^3\right)\cdot\left(5ur^2-4p^3\right)$.

c) $49z^2-112rz+64r^2=\left(7z-8r\right)^2=\left(8r-7z\right)^2$.

d) $u^3-6u^2v+12uv^2-8v^3=\left(u-2v\right)^3$.

e) $a^3+8=\left(a+2\right)\cdot\left(a^2-2a+4\right)$.

f) $18jl-10km-12jm+15kl=\left(18jl-12jm\right)+\left(15kl-10km\right)=6j\cdot\left(3l-2m\right)+5k\cdot\left(3l-2m\right)=$
$=\left(3l-2m\right)\cdot\left(6j+5k\right)$.

g) $64c^3-27d^6=\left(4c-3d^2\right)\cdot\left(16c^2+12cd^2+9d^4\right)$.

h) A $6z^2-z-2=0$ egyenlet gyökei $z_1=-\dfrac{1}{2}$ és $z_2=\dfrac{2}{3}$, így $6z^2-z-2=6\cdot\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(z-\dfrac{2}{3}\right)=$
$=\left(2z+1\right)\cdot\left(3z-2\right)$.

i) $\left(x^2y-2x^2\right)+\left(6xy-12x\right)+\left(10y-20\right)=x^2\cdot\left(y-2\right)+6x\cdot\left(y-2\right)+10\cdot\left(y-2\right)=$
$=\left(y-2\right)\cdot\left(x^2+6x+10\right)$. Mivel az $x^2+6x+10=0$ másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása (a diszkriminánsa negatív), ezért az $x^2+6x+10$ szorzótényező nem bontható tovább.

4. Egyszerűsítsük a törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{6b+6}{3b^2-3}$ **b)** $\dfrac{8c^2-8d^2}{10c^3+10d^3}$ **c)** $\dfrac{u^3-9u^2+27u-27}{u^2-9}$

d) $\dfrac{b^2+6b+5}{b^2+3b+2}$ **e)** $\dfrac{a^3+v^3}{\left(a-v\right)^2+av}$ **f)** $\dfrac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$

g) $\dfrac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}$ **h)** $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ **i)** $\dfrac{s^5+s^4t-2s^3t^2}{3s^3+5s^2t-2st^2}$

Megoldás:

a) $\dfrac{6b+6}{3b^2-3}=\dfrac{6\cdot\left(b+1\right)}{3\cdot\left(b+1\right)\cdot\left(b-1\right)}=\dfrac{2}{b-1}$, ahol $b\neq\pm1$.

b) $\dfrac{8c^2-8d^2}{10c^3+10d^3}=\dfrac{8\cdot\left(c+d\right)\cdot\left(c-d\right)}{10\cdot\left(c+d\right)\cdot\left(c^2-cd+d^2\right)}=\dfrac{4\cdot\left(c-d\right)}{5\cdot\left(c^2-cd+d^2\right)}$, ahol $c\neq-d$.

c) $\dfrac{u^3-9u^2+27u-27}{u^2-9}=\dfrac{\left(u-3\right)^3}{\left(u+3\right)\cdot\left(u-3\right)}=\dfrac{\left(u-3\right)^2}{u+3}$, ahol $u\neq\pm3$.

d) $\dfrac{b^2+6b+5}{b^2+3b+2}=\dfrac{\left(b+1\right)\cdot\left(b+5\right)}{\left(b+1\right)\cdot\left(b+2\right)}=\dfrac{b+5}{b+2}$, ahol $b\neq-1$ és $b\neq-2$.

e) $\dfrac{a^3+v^3}{\left(a-v\right)^2+av}=\dfrac{\left(a+v\right)\cdot\left(a^2-av+v^2\right)}{a^2-2av+v^2+av}=\dfrac{\left(a+v\right)\cdot\left(a^2-av+v^2\right)}{a^2-av+v^2}=a+v$, ahol $a^2-av+v^2\neq0$

(ez csak az $a=v=0$ esetet zárja ki).

f) $\dfrac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}=\dfrac{c\cdot(a-b)+d\cdot(a-b)}{c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)}=\dfrac{(a-b)\cdot(c+d)}{(a+b)\cdot(c+d)}=\dfrac{a-b}{a+b}$, ahol $a\neq -b$ és $c\neq -d$.

g) $\dfrac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}=\dfrac{c^2-\left(a^2-2ab+b^2\right)}{\left(a^2+2ac+c^2\right)-b^2}=\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(a+c)^2-b^2}=\dfrac{(c+a-b)\cdot(c-a+b)}{(a+c+b)\cdot(a+c-b)}=\dfrac{c-a+b}{a+c+b}$,

ahol $b\neq \pm(a+c)$.

h) $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}=\dfrac{x^2\cdot(x+2)-(x+2)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\dfrac{(x+2)\cdot\left(x^2-1\right)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\dfrac{(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=x+1$, ahol

$x\neq -2$ és $x\neq 1$.

i) $\dfrac{s^5+s^4t-2s^3t^2}{3s^3+5s^2t-2st^2}=\dfrac{s^3\cdot\left(s^2+st-2t^2\right)}{s\cdot\left(3s^2+5st-2t^2\right)}=\dfrac{s^3\cdot\left(s^2-st+2st-2t^2\right)}{s\cdot\left(3s^2+6st-st-2t^2\right)}=\dfrac{s^3\cdot\left(s\cdot(s-t)+2t\cdot(s-t)\right)}{s\cdot\left(3s\cdot(s+2t)-t\cdot(s+2t)\right)}=$

$=\dfrac{s^3\cdot(s-t)\cdot(s+2t)}{s\cdot(s+2t)\cdot(3s-t)}=\dfrac{s^2\cdot(s-t)}{3s-t}$, ahol $s\neq 0$, $s\neq -2t$ és $s\neq \dfrac{t}{3}$.

Megjegyzés: Az **i)** feladat számlálója és nevezője más módszerrel is szorzattá alakítható, amely hasznos bizonyos kétismeretlenes másodfokú polinomok esetében. Például a nevezőben lévő $3s^2+5st-2t^2$ szorzattá alakításakor tekintsük a $3s^2+5st-2t^2=0$ egyenletet, amely s-re nézve egy másodfokú, t paraméterű egyenlet. Ennek megoldásai $s_{1,2}=\dfrac{-5t\pm\sqrt{25t^2+24t^2}}{6}=\dfrac{-5t\pm 7t}{6}$, vagyis $s_1=-2t$ és $s_2=\dfrac{t}{3}$, így az egyenlet gyöktényezős alakja $3\cdot(s+2t)\cdot\left(s-\dfrac{t}{3}\right)$, amely $(s+2t)\cdot(3s-t)$ alakban is írható.

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}-\dfrac{c+d}{2c-2d}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{e}-\sqrt{f}}+\dfrac{4}{\sqrt{e}+\sqrt{f}}$ **c)** $\dfrac{m^2-6m+8}{m^2+4m+3}:\dfrac{m^2-4m+4}{5m+15}$

d) $\dfrac{5-g}{g^2-8g+16}+\dfrac{6}{5g-20}$ **e)** $\dfrac{a^3-8}{5a+15}\cdot\dfrac{7a+21}{a^2+2a+4}$ **f)** $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$

g) $\dfrac{u+v}{u}-\dfrac{u-1}{u-v}+\dfrac{v^2}{u^2-uv}$ **h)** $\left(l+\dfrac{1}{l}-1\right)\cdot\left(l+\dfrac{1}{l}+1\right)$ **i)** $\left(\dfrac{j^2}{i^3-ij^2}+\dfrac{1}{i+j}\right):\left(\dfrac{i-j}{i^2+ij}-\dfrac{i}{j^2+ij}\right)$

Megoldás:

a) $\dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}-\dfrac{c+d}{2c-2d}=\dfrac{c^2+d^2}{(c+d)\cdot(c-d)}-\dfrac{c+d}{2\cdot(c-d)}=\dfrac{\left(c^2+d^2\right)\cdot 2-(c+d)^2}{2\cdot(c+d)\cdot(c-d)}=$

$$=\frac{2c^2+2d^2-c^2-2cd-d^2}{2\cdot(c+d)\cdot(c-d)}=\frac{c^2-2cd+d^2}{2\cdot(c+d)\cdot(c-d)}=\frac{(c-d)^2}{2\cdot(c+d)\cdot(c-d)}=\frac{c-d}{2\cdot(c+d)}\text{, ahol } c\neq\pm d\,.$$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{e}-\sqrt{f}}+\dfrac{4}{\sqrt{e}+\sqrt{f}}=\dfrac{3\cdot\left(\sqrt{e}+\sqrt{f}\right)+4\cdot\left(\sqrt{e}-\sqrt{f}\right)}{\left(\sqrt{e}-\sqrt{f}\right)\cdot\left(\sqrt{e}+\sqrt{f}\right)}=\dfrac{7\cdot\sqrt{e}-\sqrt{f}}{e-f}$, ahol $0\leq e,f$ és $e\neq f$.

c) $\dfrac{m^2-6m+8}{m^2+4m+3}:\dfrac{m^2-4m+4}{5m+15}=\dfrac{(m-2)\cdot(m-4)}{(m+1)\cdot(m+3)}\cdot\dfrac{5\cdot(m+3)}{(m-2)^2}=\dfrac{5\cdot(m-4)}{(m+1)\cdot(m-2)}$, ahol $m\neq-1$, $m\neq-3$ és $m\neq2$.

d) $\dfrac{5-g}{g^2-8g+16}+\dfrac{6}{5g-20}=\dfrac{5-g}{(g-4)^2}+\dfrac{6}{5\cdot(g-4)}=\dfrac{(5-g)\cdot5+6\cdot(g-4)}{5\cdot(g-4)^2}=\dfrac{25-5g+6g-24}{5\cdot(g-4)^2}=$

$=\dfrac{g+1}{5\cdot(g-4)^2}$, ahol $g\neq4$.

e) $\dfrac{a^3-8}{5a+15}\cdot\dfrac{7a+21}{a^2+2a+4}=\dfrac{(a-2)\cdot\left(a^2+2a+4\right)}{5\cdot(a+3)}\cdot\dfrac{7\cdot(a+3)}{a^2+2a+4}=\dfrac{7\cdot(a-2)}{5}$, ahol $a\neq-3$. (A második tört nevezője sosem 0, mert $a^2+2a+4=(a+1)^2+3\geq0+3=3$.)

f) $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}=\dfrac{3a\cdot(3a+1)+2a\cdot(1-3a)}{(1-3a)\cdot(3a+1)}\cdot\dfrac{(3a-1)^2}{2a\cdot(3a+5)}=$

$=\dfrac{9a^2+3a+2a-6a^2}{(-1)\cdot(3a-1)\cdot(3a+1)}\cdot\dfrac{(3a-1)^2}{2a\cdot(3a+5)}=\dfrac{3a^2+5a}{-(3a+1)}\cdot\dfrac{3a-1}{2a\cdot(3a+5)}=\dfrac{a\cdot(3a+5)}{-(3a+1)}\cdot\dfrac{3a-1}{2a\cdot(3a+5)}=$

$=\dfrac{3a-1}{-2\cdot(3a+1)}$, ahol $a\neq\pm\dfrac{1}{3}$, $a\neq0$ és $a\neq-\dfrac{5}{3}$.

g) $\dfrac{u+v}{u}-\dfrac{u-1}{u-v}+\dfrac{v^2}{u^2-uv}=\dfrac{(u+v)\cdot(u-v)-(u-1)\cdot u+v^2}{u\cdot(u-v)}=\dfrac{u^2-v^2-u^2+u+v^2}{u\cdot(u-v)}=\dfrac{u}{u\cdot(u-v)}=$

$=\dfrac{1}{u-v}$, ahol $u\neq0$ és $u\neq v$.

h) $\left(l+\dfrac{1}{l}-1\right)\cdot\left(l+\dfrac{1}{l}+1\right)=l^2+1+l+1+\dfrac{1}{l^2}+\dfrac{1}{l}-l-\dfrac{1}{l}-1=l^2+\dfrac{1}{l^2}+1$, ahol $l\neq0$. Másképpen: $\left(\left(l+\dfrac{1}{l}\right)-1\right)\cdot\left(\left(l+\dfrac{1}{l}\right)+1\right)=\left(l+\dfrac{1}{l}\right)^2-1^2=l^2+2+\dfrac{1}{l^2}-1=l^2+\dfrac{1}{l^2}+1$.

i) $\left(\dfrac{j^2}{i^3-ij^2}+\dfrac{1}{i+j}\right):\left(\dfrac{i-j}{i^2+ij}-\dfrac{i}{j^2+ij}\right)=\left(\dfrac{j^2}{i\cdot\left(i^2-j^2\right)}+\dfrac{1}{i+j}\right):\left(\dfrac{i-j}{i\cdot(i+j)}-\dfrac{i}{j\cdot(j+i)}\right)=$

$=\dfrac{j^2+1\cdot i\cdot(i-j)}{i\cdot(i+j)\cdot(i-j)}:\dfrac{(i-j)\cdot j-i\cdot i}{i\cdot j\cdot(i+j)}=\dfrac{j^2+i^2-ij}{i\cdot(i+j)\cdot(i-j)}:\dfrac{ij-j^2-i^2}{i\cdot j\cdot(i+j)}=$

$$=\frac{i^2+j^2-ij}{i\cdot(i+j)\cdot(i-j)}\cdot\frac{i\cdot j\cdot(i+j)}{(-1)\cdot(i^2+j^2-ij)}=\frac{j}{(-1)\cdot(i-j)}=\frac{j}{j-i}\text{, ahol } i\neq 0\text{, } i\neq\pm j \text{ és } j\neq 0\text{.}$$

6. Egyszerűsítsük a törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{9a^3-42a^2+52a-16}{6a-8}$ **b)** $\dfrac{8b^4-12b^3+2b^2+23b-39}{4b^2-9}$

Megoldás:

a) A tört akkor értelmezhető, ha $a\neq\dfrac{4}{3}$. Az eredményt polinomosztással kapjuk:

$$\begin{array}{l}
\left(9a^3-42a^2+52a-16\right):\left(6a-8\right)=\frac{3}{2}a^2-5a+2\\
\underline{9a^3-12a^2}\\
\quad -30a^2+52a-16\\
\quad \underline{-30a^2+40a}\\
\qquad\qquad 12a-16\\
\qquad\qquad \underline{12a-16}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Tehát az egyszerűsített tört értéke $\dfrac{3}{2}a^2-5a+2$.

Megjegyzés: Ha a nevezőt $2\cdot(3a-4)$ alakra hozzuk, majd a számlálót csak $3a-4$-gyel osztjuk el, akkor a végeredményt $\dfrac{3a^2-10a+4}{2}$ alakban kapjuk meg. Így az osztás során minden együttható egész lesz, ez azonban nem szükségszerű egy polinomosztásnál, mint azt a fenti példa is mutatja. Fontos megfigyelnünk, hogy a $6a-8$-cal történő osztáskor az első lépésben a hányados első tagja $\dfrac{3}{2}a^2$ lett (tehát a nem egész együtthatók is megengedettek), nem pedig $1a^2$, ekkor ugyanis a $9a^3$-ből még $3a^3$ megmaradt volna, viszont az osztási lépésekben a maradék fokszámának mindig kisebbnek kell lennie az osztó fokszámánál (kivéve, ha a hányados 0).

b) A tört akkor értelmezhető, ha $b\neq\pm\dfrac{3}{2}$ (ezek a nevező gyökei). Polinomosztással kapjuk, hogy:

$$\begin{array}{l}
\left(8b^4-12b^3+2b^2+23b-39\right):\left(4b^2-9\right)=2b^2-3b+5\\
\underline{8b^4\qquad\quad -18b^2}\\
\quad -12b^3+20b^2+23b-39\\
\quad \underline{-12b^3\qquad\quad +27b}\\
\qquad\qquad 20b^2-4b-39\\
\qquad\qquad \underline{20b^2\qquad\ -45}\\
\qquad\qquad\qquad -4b+6
\end{array}$$

Mivel az utolsó lépésben a maradék $-4b+6$, ez viszont már nem osztható $4b^2-9$-cel, ezért a tört számlálója nem osztható maradék nélkül a nevezővel. (A maradékos osztás a következőképpen lenne felírható: $8b^4-12b^3+2b^2+23b-39=\left(2b^2-3b+5\right)\cdot\left(4b^2-9\right)-4b+6$.)

A nevező viszont szorzattá alakítható: $4b^2-9=(2b+3)\cdot(2b-3)$, így megpróbálhatjuk külön-külön a szorzótényezők valamelyikével elosztani a tört számlálóját. Mivel $b=\frac{3}{2}$ gyöke a számlálónak (ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük), de $b=-\frac{3}{2}$ nem gyöke, ezért $2b-3$-mal fogjuk tudni maradék nélkül elosztani a számlálót:

$$\begin{array}{l}
(8b^4-12b^3+2b^2+23b-39):(2b-3)=4b^3+b+13 \\
\underline{8b^4-12b^3} \\
\phantom{8b^4-12b^3+{}}2b^2+23b-39 \\
\phantom{8b^4-12b^3+{}}\underline{2b^2-\ 3b} \\
\phantom{8b^4-12b^3+2b^2+{}}26b-39 \\
\phantom{8b^4-12b^3+2b^2+{}}\underline{26b-39} \\
0
\end{array}$$

A kapott $4b^3+b+13$ kifejezés már biztosan nem osztható maradék nélkül $2b+3$-mal, hiszen $b=-\frac{3}{2}$ nem gyöke $4b^3+b+13$-nak. (Ráadásul ha osztható lenne vele, akkor az eredeti $4b^2-9$ kifejezéssel is el tudtuk volna osztani az eredeti számlálót.)

Így tehát az egyszerűsítés a következőképpen írható le:

$$\frac{8b^4-12b^3+2b^2+23b-39}{4b^2-9}=\frac{(4b^3+b+13)\cdot(2b-3)}{(2b+3)\cdot(2b-3)}=\frac{4b^3+b+13}{2b+3}.$$

7. Határozzuk meg számológép használata nélkül a következő műveletek végeredményét!

a) 508^2 **b)** 8^3+12^3 **c)** 39^3

d) $61\cdot 79$ **e)** 123^2 **f)** 15^3-5^3

Megoldás:

a) $508^2=(500+8)^2=500^2+2\cdot 500\cdot 8+8^2=250000+8000+64=258064$.

b) $8^3+12^3=(8+12)\cdot(8^2-8\cdot 12+12^2)=20\cdot(64-96+144)=20\cdot 112=2240$.

c) $39^3=(40-1)^3=40^3-3\cdot 40^2\cdot 1+3\cdot 40\cdot 1^2-1^3=64000-4800+120-1=59319$.

d) $61\cdot 79=(70-9)\cdot(70+9)=70^2-9^2=4900-81=4819$.

e) $123^2=(100+20+3)^2=100^2+20^2+3^2+2\cdot(100\cdot 20+100\cdot 3+20\cdot 3)=$
$=10000+400+9+2\cdot(2000+300+60)=10409+2\cdot 2360=10409+4720=15129$.

f) $15^3-5^3=(15-5)\cdot(15^2+15\cdot 5+5^2)=10\cdot(225+75+25)=10\cdot 325=3250$.

8. Határozzuk meg számológép használata nélkül, hogy az 1591 és a 4891 közül melyik számnak van több pozitív osztója!

Megoldás: Az osztók számát meghatározhatnánk a számok prímtényezős felbontásából, azonban sem az 1591, sem a 4891 nem osztható semelyik egyjegyű prímmel sem, így a prímtényezők keresése hosszabb írásbeli osztásokat igényelne.

Vegyük észre, hogy $1591 = 1600 - 9 = 40^2 - 3^2$ és $4891 = 4900 - 9 = 70^2 - 3^2$, így a nevezetes azonosságokkal $1591 = (40+3)\cdot(40-3) = 43\cdot 37$ és $4891 = (70+3)\cdot(70-3) = 73\cdot 67$ adódik. Mivel a 37, 43, 67, 73 számok mindegyike prím, ezért az 1591 és a 4891 is két prím szorzata, tehát ugyanannyi (4 db) pozitív osztójuk van.

9. Határozzuk meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy minden $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -3$ esetén teljesül az $\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3}$ összefüggés!

Megoldás: A jobb oldal átalakítva: $\frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a\cdot(x+3) + b\cdot(2x-1)}{(2x-1)\cdot(x+3)} = \frac{ax+3a+2bx-b}{2x^2+5x-3}$.

Mivel $\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{ax+3a+2bx-b}{2x^2+5x-3}$ teljesül minden megengedett x értékre, ezért a számlálók egyenlősége $0\cdot x + 5 = (a+2b)\cdot x + (3a-b)$ alakban is írható. Két (elsőfokú) polinom pontosan akkor egyenlő, ha együtthatóik rendre megegyeznek, azaz $a + 2b = 0$ és $3a - b = 5$. Az első összefüggésből $a = -2b$, ezt a másodikba helyettesítve $3\cdot(-2b) - b = -7b = 5$, ahonnan $b = -\frac{5}{7}$ és $a = \frac{10}{7}$ adódik.

Megjegyzés: Ezt az eljárást – amikor tehát egy (legalább) másodfokú nevezőjű algebrai törtet több elsőfokú nevezőjű tört összegeként írunk fel – parciális törtekre bontásnak nevezzük.

10. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $8x^3 - 6x^2 - 29x - 15 = 0$

b) $20x^4 + 8x^3 - 105x^2 + 8x + 20 = 0$

Megoldás:

a) Mivel az együtthatók váltakozó előjeles összege $8 - (-6) + (-29) - (-15) = 0$, ezért az $x_1 = -1$ gyöke az egyenletnek, így $x + 1$ szorzótényezőként kiemelhető belőle. Polinomosztással kapjuk:

$$
\begin{array}{l}
(8x^3 - 6x^2 - 29x - 15) : (x+1) = 8x^2 - 14x - 15 \\
\underline{8x^3 + 8x^2} \\
\quad -14x^2 - 29x - 15 \\
\quad \underline{-14x^2 - 14x} \\
\qquad\quad -15x - 15 \\
\qquad\quad \underline{-15x - 15} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

A $8x^2-14x-15=0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_2=\frac{5}{2}$ és $x_3=-\frac{3}{4}$. Tehát az eredeti egyenlet három megoldása a -1, az $\frac{5}{2}$ és a $-\frac{3}{4}$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek mindegyike valóban jó megoldás.

b) Mivel szimmetrikus negyedfokú egyenletről van szó, amelynek a 0 nem gyöke, ezért x^2-tel végigosztva a $20x^2+8x-105+\frac{8}{x}+\frac{20}{x^2}=0$ egyenletet kapjuk, amely az $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ összefüggés alapján $20\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+8\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)-145=0$ alakra hozható. Ez $x+\frac{1}{x}$-re nézve másodfokú, a két gyök $\frac{5}{2}$ és $-\frac{29}{10}$.

Ha $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, akkor az $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$ egyenletből az $x_1=\frac{1}{2}$ és $x_2=2$ megoldásokat kapjuk.

Ha $x+\frac{1}{x}=-\frac{29}{10}$, akkor az $x^2+\frac{29}{10}x+1=0$ egyenletből az $x_3=-\frac{2}{5}$ és $x_4=-\frac{5}{2}$ megoldásokat kapjuk.

Tehát az eredeti egyenlet négy megoldása az $\frac{1}{2}$, a 2, a $-\frac{2}{5}$ és a $-\frac{5}{2}$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek mindegyike valóban jó megoldás.

11. Döntsük el a következő műveletek végeredményeiről, hogy racionálisak vagy irracionálisak-e!

a) $\sqrt{3\sqrt{29}-6}\cdot\sqrt{3\sqrt{29}+6}$ **b)** $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{3\sqrt{29}-6}\cdot\sqrt{3\sqrt{29}+6}=\sqrt{\left(3\sqrt{29}\right)^2-6^2}=\sqrt{9\cdot 29-36}=\sqrt{225}=15$ racionális.

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left|1+\sqrt{2}\right|+\left|1-\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}$ irracionális.

c) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}=\left|1+\sqrt{6}\right|-\left|1-\sqrt{6}\right|=1+\sqrt{6}-\left(\sqrt{6}-1\right)=2$ racionális.

12. Határozzuk meg a $2x^2+y^2+2x+2xy+4$ kifejezés minimumát, ha x és y tetszőleges valós szám lehet!

Megoldás: Keressünk teljes négyzeteket: $2x^2+y^2+2x+2xy+4=\left(x+y\right)^2+\left(x+1\right)^2+3$. Mivel egy teljes négyzet értéke mindig nemnegatív, ezért $\left(x+y\right)^2+\left(x+1\right)^2+3\geq 0+0+3$, vagyis a kifejezés értéke legalább 3. Pontosan 3 akkor lehet, ha $x+y=0$ és $x+1=0$. Ez meg is valósulhat, $x=-1$ és $y=1$ esetén. Tehát a kifejezés minimuma 3.

13. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ kifejezés értékét, ha $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ és $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ teljesül (ahol a, b, c, x, y és z egyike sem 0)!

Megoldás: Az $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ egyenletet xyz-vel szorozva az $ayz+bxz+cxy=0$ összefüggést kapjuk, amelyet abc-vel elosztva a $\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}=0$ egyenlethez jutunk. Mivel $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, így $1^2=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\cdot\underbrace{\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)}_{0}$, ahonnan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ a keresett kifejezés értéke.

14. Írjuk fel minél egyszerűbb alakban a következő kifejezést, ahol $x\notin\{0;-1;-2;-3;-4;-5\}$:

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}+\frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)}+\frac{1}{(x+3)\cdot(x+4)}+\frac{1}{(x+4)\cdot(x+5)}$$

Megoldás: Az $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+5)$ közös nevező választása rendkívül hosszú számolást eredményezne. Ehelyett észrevehetjük (a parciális törtekre bontás korábban ismertetett módszerével), hogy $\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$, és így tovább, $\frac{1}{(x+4)\cdot(x+5)}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$. Vagyis a vizsgált kifejezés felírható a következőképpen:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x\cdot(x+5)}.$$

IV. Ellenőrző feladatok

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd adjuk meg az eredményt minél egyszerűbb alakban!

a) $(3-b)\cdot(2b+5)-(b-2)^2\cdot(b-4b^2)$ **b)** $(f^3-2f^2+ef)\cdot(e^2+5ef-f)$

2. A zárójelek felbontásával alakítsuk át többtagú kifejezéssé a következőket!

a) $(5ef^3-4e)^2$ **b)** $(2q+5r)^3$ **c)** $\left(\frac{3}{4}c+\frac{1}{3}d\right)^2$

d) $(3uv^5-2u^4v)^3$ **e)** $(x^y+y^x)(x^y-y^x)$ **f)** $(2f-3g-4h)^2$

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $i^2 - ij + ik - jk$ **b)** $5m\cdot(a-b) - 3n\cdot(b-a)$ **c)** $100f^4 + 60f^2g^3 + 9g^6$

d) $64p^3q^6 + 8p^{12}q^3$ **e)** $64j^2 - 96jk + 36k^2$ **f)** $a^3 - 3a^2b + 6ab^2 - 8b^3$

g) $3v^2 + 27v + 54$ **h)** $q^3 - 8 + 6q^2 - 12q$ **i)** $x^3y + 8x^2y + 19xy + 12y$

4. Egyszerűsítsük a törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{3c^2 - 27d^2}{5c^2 + 30cd + 45d^2}$ **b)** $\dfrac{18t^2 + 36tu + 18u^2}{9t^4 - 9u^4}$ **c)** $\dfrac{d^2e + 8de + 7e}{de - 2d + 7e - 14}$

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{i-j}{3i+3j} - \dfrac{i^2+j^2}{i^2-j^2}$ **b)** $\left(\dfrac{o}{o+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3o^2}{1-o^2}\right)$ **c)** $\dfrac{a+6b}{a^2-3ab} - \dfrac{9b-a}{2ab-6b^2} - \dfrac{1}{2b}$

d) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{3a+3b}{5a-5b}$ **e)** $\left(\dfrac{k}{2l}+\dfrac{2l}{k}\right)^2 - \left(\dfrac{k}{2l}-\dfrac{2l}{k}\right)^2$ **f)** $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}$

6. Egyszerűsítsük a $\dfrac{4k^4 - 23k^3 - 39k^2 + 32k - 28}{(k+2)\cdot(k-7)}$ törtet, ahol $k \neq -2$ és $k \neq 7$!

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6x^5 + 5x^4 - 29x^3 + 29x^2 - 5x - 6 = 0$ egyenletet!

8. Határozzuk meg számológép használata nélkül a következő műveletek végeredményét!

a) 998^2 **b)** $328^2 - 172^2$ **c)** $296\cdot 304$

9. Bizonyítsuk be, hogy a $\dfrac{80a}{4a-10}:\left(\dfrac{2a+5}{2a-5}-\dfrac{2a-5}{2a+5}\right)$ kifejezés értéke minden egész *a* esetén páratlan szám!

Az ellenőrző feladatok megoldásai

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd adjuk meg az eredményt minél egyszerűbb alakban!

a) $(3-b)\cdot(2b+5)-(b-2)^2\cdot(b-4b^2)$ **b)** $(f^3 - 2f^2 + ef)\cdot(e^2 + 5ef - f)$

Megoldás:

a) $(3-b)\cdot(2b+5)-(b-2)^2\cdot(b-4b^2) = 4b^4 - 17b^3 + 18b^2 - 3b + 15$.

b) $(f^3 - 2f^2 + ef)\cdot(e^2 + 5ef - f) = e^3f + e^2f^3 + 3e^2f^2 + 5ef^4 - 10ef^3 - ef^2 - f^4 + 2f^3$.

2. A zárójelek felbontásával alakítsuk át többtagú kifejezéssé a következőket!

a) $\left(5ef^3-4e\right)^2$ **b)** $\left(2q+5r\right)^3$ **c)** $\left(\frac{3}{4}c+\frac{1}{3}d\right)^2$

d) $\left(3uv^5-2u^4v\right)^3$ **e)** $\left(x^y+y^x\right)\left(x^y-y^x\right)$ **f)** $\left(2f-3g-4h\right)^2$

Megoldás:

a) $\left(5ef^3-4e\right)^2=25e^2f^6-40e^2f^3+16e^2$.

b) $\left(2q+5r\right)^3=8q^3+60q^2r+150qr^2+125r^3$.

c) $\left(\frac{3}{4}c+\frac{1}{3}d\right)^2=\frac{9}{16}c^2+\frac{1}{2}cd+\frac{1}{9}d^2$.

d) $\left(3uv^5-2u^4v\right)^3=27u^3v^{15}-54u^6v^{11}+36u^9v^7-8u^{12}v^3$.

e) $\left(x^y+y^x\right)\left(x^y-y^x\right)=x^{2y}-y^{2x}$.

f) $\left(2f-3g-4h\right)^2=4f^2+9g^2+16h^2-12fg-16fh+24gh$.

3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $i^2-ij+ik-jk$ **b)** $5m\cdot(a-b)-3n\cdot(b-a)$ **c)** $100f^4+60f^2g^3+9g^6$

d) $64p^3q^6+8p^{12}q^3$ **e)** $64j^2-96jk+36k^2$ **f)** $a^3-3a^2b+6ab^2-8b^3$

g) $3v^2+27v+54$ **h)** q^3-8+6q^2-12q **i)** $x^3y+8x^2y+19xy+12y$

Megoldás:

a) $i^2-ij+ik-jk=(i+k)\cdot(i-j)$.

b) $5m\cdot(a-b)-3n\cdot(b-a)=(5m+3n)\cdot(a-b)$.

c) $100f^4+60f^2g^3+9g^6=\left(10f^2+3g^3\right)^2$.

d) $64p^3q^6+8p^{12}q^3=\left(4pq^2+2p^4q\right)\cdot\left(16p^2q^4-8p^5q^3+4p^8q^2\right)$.

e) $64j^2-96jk+36k^2=(8j-6k)^2$.

f) $a^3-3a^2b+6ab^2-8b^3\neq(a-2b)^3$, mert ez utóbbi értéke $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$. Ezt felhasználva $a^3-3a^2b+6ab^2-8b^3=(a-2b)^3+3a^2b-6ab^2=(a-2b)^3+3ab\cdot(a-2b)=$

$=\left(a-2b\right)\cdot\left(a^2-ab+4b^2\right)$.

g) $3v^2+27v+54=3\cdot\left(v+3\right)\cdot\left(v+6\right)$.

h) $q^3-8+6q^2-12q=\left(q^3-2^3\right)+6q\cdot\left(q-2\right)=\left(q-2\right)\cdot\left(q^2+8q+4\right)$.

i) $x^3y+8x^2y+19xy+12y=y\cdot\left(x^3+8x^2+19x+12\right)=y\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(x+3\right)\cdot\left(x+4\right)$. A megoldás ötlete, hogy az $x^3+8x^2+19x+12=0$ egyenletnek gyöke a -1, így $x+1$-et kiemelve polinomosztással kapjuk a szorzatalakot.

4. Egyszerűsítsük a törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{3c^2-27d^2}{5c^2+30cd+45d^2}$ **b)** $\dfrac{18t^2+36tu+18u^2}{9t^4-9u^4}$ **c)** $\dfrac{d^2e+8de+7e}{de-2d+7e-14}$

Megoldás:

a) $\dfrac{3c^2-27d^2}{5c^2+30cd+45d^2}=\dfrac{3\cdot\left(c+3d\right)\cdot\left(c-3d\right)}{5\cdot\left(c+3d\right)^2}=\dfrac{3\cdot\left(c-3d\right)}{5\cdot\left(c+3d\right)}$, ahol $c\neq-3d$.

b) $\dfrac{18t^2+36tu+18u^2}{9t^4-9u^4}=\dfrac{18\cdot\left(t+u\right)^2}{9\cdot\left(t^2+u^2\right)\cdot\left(t+u\right)\cdot\left(t-u\right)}=\dfrac{2\cdot\left(t+u\right)}{\left(t^2+u^2\right)\cdot\left(t-u\right)}$, ahol $t\neq\pm u$.

c) $\dfrac{d^2e+8de+7e}{de-2d+7e-14}=\dfrac{e\cdot\left(d+7\right)\cdot\left(d+1\right)}{\left(d+7\right)\cdot\left(e-2\right)}=\dfrac{e\cdot\left(d+1\right)}{e-2}$, ahol $d\neq-7$ és $e\neq2$.

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{i-j}{3i+3j}-\dfrac{i^2+j^2}{i^2-j^2}$ **b)** $\left(\dfrac{o}{o+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3o^2}{1-o^2}\right)$ **c)** $\dfrac{a+6b}{a^2-3ab}-\dfrac{9b-a}{2ab-6b^2}-\dfrac{1}{2b}$

d) $\dfrac{a^2-b^2}{\left(a+b\right)^2}\cdot\dfrac{3a+3b}{5a-5b}$ **e)** $\left(\dfrac{k}{2l}+\dfrac{2l}{k}\right)^2-\left(\dfrac{k}{2l}-\dfrac{2l}{k}\right)^2$ **f)** $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}$

Megoldás:

a) $\dfrac{i-j}{2i+2j}-\dfrac{i^2+j^2}{i^2-j^2}=\dfrac{\left(i-j\right)^2-2\cdot\left(i^2+j^2\right)}{2\cdot\left(i+j\right)\cdot\left(i-j\right)}=\dfrac{-\left(i+j\right)^2}{2\cdot\left(i+j\right)\cdot\left(i-j\right)}=\dfrac{-i-j}{2\cdot\left(i-j\right)}$, ahol $i\neq\pm j$.

b) $\left(\dfrac{o}{o+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3o^2}{1-o^2}\right)=\dfrac{2o+1}{o+1}:\dfrac{1-4o^2}{\left(1+o\right)\cdot\left(1-o\right)}=\dfrac{2o+1}{o+1}\cdot\dfrac{\left(1+o\right)\cdot\left(1-o\right)}{\left(1+2o\right)\cdot\left(1-2o\right)}=\dfrac{1-o}{1-2o}$,

ahol $o\neq\pm1$ és $o\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{a+6b}{a^2-3ab}-\dfrac{9b-a}{2ab-6b^2}-\dfrac{1}{2b}=\dfrac{(a+6b)\cdot 2b-(9b-a)\cdot a-a\cdot(a-3b)}{a\cdot(a-3b)\cdot 2b}=\dfrac{-4b\cdot(a-3b)}{a\cdot(a-3b)\cdot 2b}=\dfrac{-2}{a}$,

ahol $a\neq 0$, $a\neq 3b$ és $b\neq 0$.

d) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{3a+3b}{5a-5b}=\dfrac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{3\cdot(a+b)}{5\cdot(a-b)}=\dfrac{3}{5}$, ahol $a\neq\pm b$.

e) $\left(\dfrac{k}{2l}+\dfrac{2l}{k}\right)^2-\left(\dfrac{k}{2l}-\dfrac{2l}{k}\right)^2=\left(\dfrac{k^2}{4l^2}+2+\dfrac{4l^2}{k^2}\right)-\left(\dfrac{k^2}{4l^2}-2+\dfrac{4l^2}{k^2}\right)=4$, ahol $k\neq 0$ és $l\neq 0$.

f) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}=\dfrac{(a+1)^2+6-(a+3)\cdot(a-1)}{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\dfrac{4\cdot(a+1)\cdot(a-1)}{3}=$

$=\dfrac{10}{2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\dfrac{4\cdot(a+1)\cdot(a-1)}{3}=\dfrac{20}{3}$, ahol $a\neq\pm 1$.

6. Egyszerűsítsük a $\dfrac{4k^4-23k^3-39k^2+32k-28}{(k+2)\cdot(k-7)}$ törtet, ahol $k\neq -2$ és $k\neq 7$!

Megoldás: $\dfrac{4k^4-23k^3-39k^2+32k-28}{(k+2)\cdot(k-7)}=\dfrac{(4k^2-3k+2)\cdot(k+2)\cdot(k-7)}{(k+2)\cdot(k-7)}=4k^2-3k+2$. A végeredményt megkaphatjuk két egymás utáni polinomosztással (például először $k+2$-vel osztjuk el az eredeti számlálót, majd a kapott hányadost $k-7$-tel osztjuk, vagy fordított sorrendben). Megtehetjük azonban azt is, hogy a számlálót rögtön $(k+2)\cdot(k-7)=k^2-5k-14$-gyel osztjuk el, ekkor kettő helyett csak egy osztást kell végrehajtanunk. Ilyenkor elvileg elképzelhető lenne, hogy az osztás során maradék keletkezik (ha a számláló nem osztható a nevező mindkét szorzótényezőjével), de a mostani feladatban nincsen maradék, ezzel a módszerrel is a helyes végeredményt kapjuk.

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6x^5+5x^4-29x^3+29x^2-5x-6=0$ egyenletet!

Megoldás: Mivel az együtthatók összege $6+5-29+29-5-6=0$, ezért az egyenletnek biztosan gyöke az $x_1=1$. Az $x-1$-et szorzótényezőként kiemelve polinomosztással a következő alakot kapjuk: $(x-1)\cdot\left(6x^4+11x^3-18x^2+11x+6\right)=0$. A második tényező egy szimmetrikus negyedfokú kifejezés, amely x^2-tel osztva ($x\neq 0$) és rendezve $6\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+11\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-30$ alakra hozható. Ennek $x+\dfrac{1}{x}$-re vett gyökei $-\dfrac{10}{3}$ és $\dfrac{3}{2}$. Az $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$ eset megoldásai $x_2=-3$ és $x_3=-\dfrac{1}{3}$, míg az $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$ eset nem ad valós megoldást (hiszen $x^2-\dfrac{3}{2}x+1=0$ diszkriminánsa negatív, illetve ismert, hogy $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq 2$).

Tehát az egyenletnek három valós megoldása van: az 1, a -3 és a $-\frac{1}{3}$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek mindegyike valóban jó megoldás.

8. Határozzuk meg számológép használata nélkül a következő műveletek végeredményét!

a) 998^2 **b)** $328^2 - 172^2$ **c)** $296 \cdot 304$

Megoldás:

a) $998^2 = (1000-2)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 2 + 2^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996004$.

b) $328^2 - 172^2 = (328+172) \cdot (328-172) = 500 \cdot 156 = 78000$.

c) $296 \cdot 304 = (300-4) \cdot (300+4) = 300^2 - 4^2 = 90000 - 16 = 89984$.

9. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{80a}{4a-10} : \left(\frac{2a+5}{2a-5} - \frac{2a-5}{2a+5} \right)$ kifejezés értéke minden egész a esetén páratlan szám!

Megoldás: A nevezők miatt $a \neq \pm 2{,}5$, vagyis a kifejezés minden egész a-ra értelmezve van.

$$\frac{80a}{4a-10} : \left(\frac{2a+5}{2a-5} - \frac{2a-5}{2a+5} \right) = \frac{40a}{2a-5} : \frac{(2a+5)^2 - (2a-5)^2}{(2a-5) \cdot (2a+5)} = \frac{40a}{2a-5} \cdot \frac{(2a-5) \cdot (2a+5)}{40a} = 2a+5,$$

amely valóban minden egész a esetén páratlan szám, hiszen egy páros ($2a$) és egy páratlan (5) szám összege.